زغيب شهرزاد بن ديب رشيد

الاقتصاد الرياضي
محاضرات
وتمارين محلولة

الطبعة الثانية



رقم النشر: 4.01.5203
رقم ر.د.م.ك(ISBN): 978.9961.0.1439.4
رقم الإيداع القانوني: 416-2011

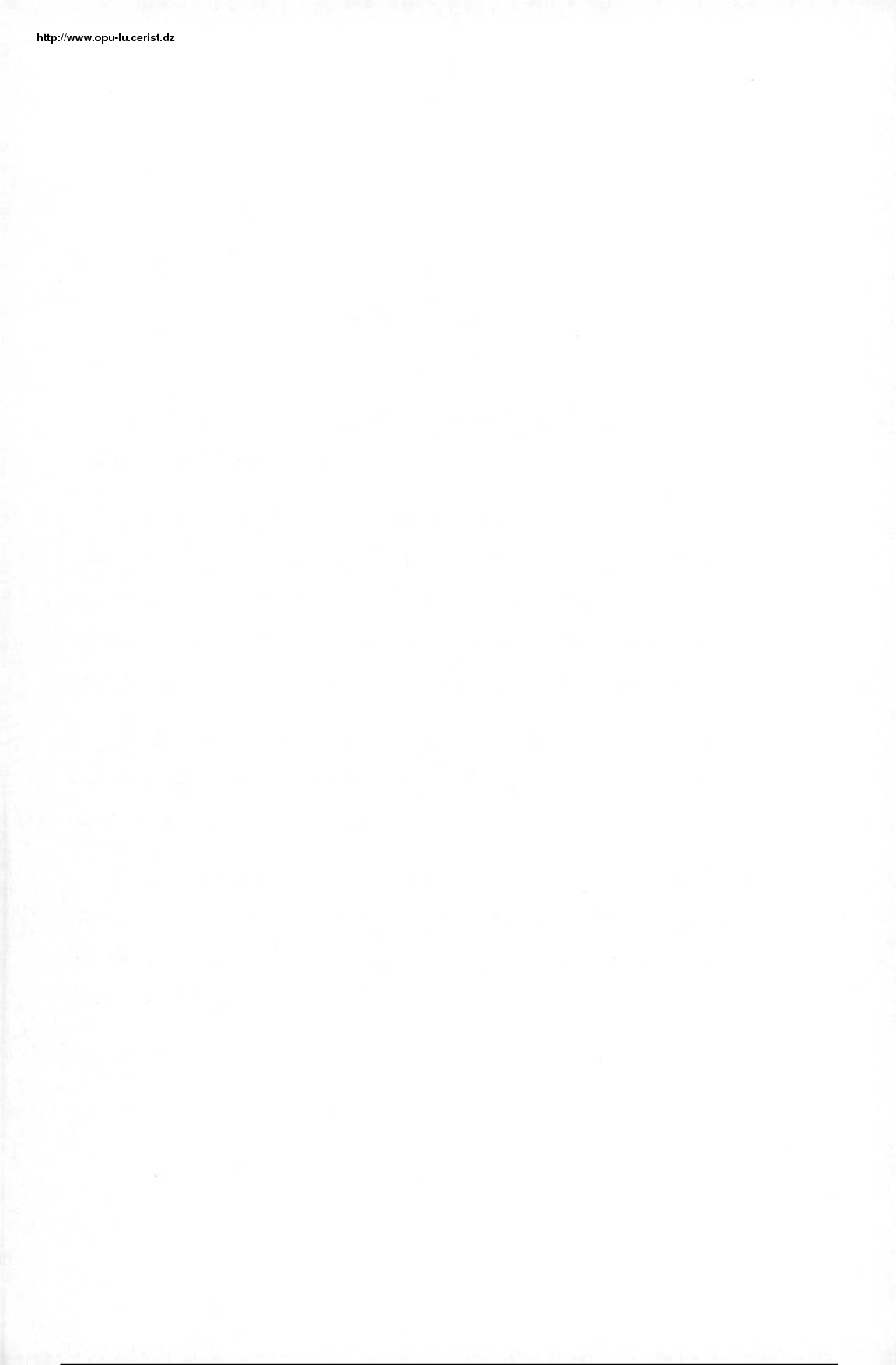
فاتحة الكتاب

إن استخدام الأساليب الكمية في دراسة الظواهر الاقتصادية وتحليلها يعد ميزة من مزايا الاقتصاد المعاصر.

ولهذا نحاول من خلال هذا الكتاب الذي نضعه بين أيدي طلابنا إلى توضيح خلفيتين رئيسيتين، الأولى تتعلق بالخلفية الرياضية التي تسمح بالتعرف على الأدوات الرياضية والذي تجد تطبيقاتها في النظرية الاقتصادية، والثانية تتعلق بالخلفية في النظرية الاقتصادية الذي يتطلب استيضاحها دراسات رياضية خاصة بها والأدوات الرياضية التي تجد لها مجالا خصبا في التطبيقات الاقتصادية.

ولذلك نسعى من خلال هذا المرجع توضيح كيف تساعد الرياضيات من جهة فهم بعض الأفكار الاقتصادية ومن جهة أخرى ترجمة النقاش اللغوي إلى أطر متكاملة تامة في صورة رياضية.

ويتميز هذا الكتاب بشموليته وعمق أسلوبه في تحليل الموضوعات ليعطي صورة حقيقية وواضحة لكل قاعدة أو نتيجة، حتى تساعد طلابنا على مسايرة لغة العصر باستخدام أدوات التحليل الكمي في دراسة الظواهر والعمليات الاقتصادية وتحليلها.



المحتويات

الفصل الثاني: الإشتقاق – التفاضل-القيم القصوى



فصل تمهيدي
المفاهـيم الأساسـية

1- المتغيرات
2- العلاقات الإقتصادية
3- المعادلات الهيكلية
4- الدالة



1- المتغيرات

أ- تعريفها

يعرف المتغير بأنه أي شيء يمكن أن يأخذ قيما قابلة للتغير، مثل المتغيرات التي يحوى عليها الاقتصاد الجزئي والكلي [الإيراد، الربح، السعر، الاستهلاك، الدخل الوطني......] وهي قيم قابلة للتغير تبعا لظروف معينة. ونتيجة لذلك يمكن تصنيف متغيرات النموذج الاقتصادي إلى:

- المتغيرات الداخلية
- المتغيرات الخارجية
- المتغيرات المتخلفة زمنيا
- المتغيرات العشوائية

ب- المتغيرات الداخلية

هي المتغيرات التي تتحدد قيمتها ضمن النموذج نفسه عن طريق المعاملات وقيم المتغيرات الخارجية للنموذج الاقتصادي وتسمى هذه المتغيرات أيضا بالمتغيرات التابعة أو متغيرات غير مفسّرة، أي هي المتغيرات التي نحاول الحصول على قيمها من خلال حل النماذج الرياضية مثلا من المعادلة أدناه يمكن أن نحصل على الاستهلاك في نموذج الدخل

$$C = f(Y)$$
$$C = \alpha + \beta Y \qquad (1)$$

العلاقة (1) تعبر عن معادلة الاستهلاك، ويعتبـــر C (الاستهـــلاك) و Y (الدخل) متغيرات يمكن التنبؤ بها وتقديرها أو تقييمها.

جـــ- المتغيرات الخارجية

هي المتغيرات التي لا تتحدد قيمها عن طريق النموذج الاقتصادي، وإنما تتحدد بعوامل خارجة عن النموذج، بمعنى قيم المتغيرات تكون محدد مسبقا مثلا إدخال الاستثمار في نموذج الدخل يكون في هذه الحالة الاستثمار محددا للدخل لكنه لا يتأثر به وبذلك يعتبر متغيرا خارجيا.

ملاحظة

المتغيرات الخارجية تؤثر في المتغيرات ولا تتأثر بها بينما المتغيرات الداخلية تؤثر في بعضها البعض وتتأثر بجميع المتغيرات الداخلة في النموذج سواء كانت داخلية أو خارجية.

د- المتغيرات المتخلفة زمنيا

هي المتغيرات التي تنتمي إلى فترة زمنية سابقة، مثلا الإنفاق الاستهلاكي الشخصي قد لا يعتمد على الدخل الشخصي المتاح للإنفاق في السنة الحالية، وإنما يعتمد على الدخل الشخصي المتاح للإنفاق في هذه السنة والسنوات السابقة [فترة الإبطاء]. ويمكن توضيح ذلك من خلال المعادلة التالية:

$$C = \alpha + \beta_1 Y_t + \beta_2 Y_{t-1} + \beta_3 Y_{t-2} \qquad (2)$$

حيث C يمثل الإنفاق الاستهلاكي الشخصي، Y_t الدخل المستحق المتاح للإنفاق، α معامل ثابت، t: السنة الحالية، $t-1$ السنة السابقة و$t-2$ السنة قبل السابقة. ويطلق على المعادلة (2) بنموذج فترات الإبطاء الموازنة.

وفي هذا النموذج تعتمد القيمة الحالية للمتغير التابع C على المجموع المرجح للقيم الحالية و السابقة للمتغيرات المستقلة $(Y_t\ ,\ Y_{t-1}\ ,\ Y_{t-2}.)$

و- المتغيرات العشوائية

هي المتغيرات التي تتولد قيمتها بفعل عملية عشوائية وبالتالي يحكمها قانون احتمالي، حيث أن المتغير العشوائي عبارة عن حد الخطأ والذي يمثل كل المتغيرات التي تؤثر على الإنفاق الاستهلاكي والتي يصعب أخذها في الاعتبار بوضوح.

2-العلاقات الاقتصادية

أ- طبيعة العلاقات الاقتصادية

تقوم العلاقة بين المتغيرات الاقتصادية من وجهة النظر النيوكلاسيكية على أسس سببية. ويراد بالعلاقة السببية أن يكون البعض تحت ظروف معينة سببا في حدوث ظاهرة أخرى معينة تدعى النتيجة.
مثلا: نتيجة لانخفاض كلفة إنتاج الوحدة الواحدة من سلعة ما كان سببا في زيادة حجم الإنتاج من تلك السلعة. وسبب انخفاض استهلاك الفرد من سلعة ما نتيجة لارتفاع سعر سلعة ما.

ولأغراض التحليل الكمي للعلاقات الاقتصادية تستخدم الرموز الرياضية. تفترض النظرية الاقتصادية أن الاستهلاك (C) دالة في الدخل Y أي أن العلاقة الرياضية هي:

$$C = f(Y) \qquad (3)$$

$$C = \alpha + \beta Y \qquad (4)$$

ب- العلاقة الخطية

تتخذ معادلات هذه العلاقات الصيغة الخطية حيث تظهر متغيرات هذه العلاقات في صورة درجة الأولى ويمكن تمييز بين نوعين من هذه العلاقات.

* **العلاقة الخطية البسيطة:** وهي تلك العلاقة التي تتكون من معادلة واحدة معالمها خطية وتحتوي على متغيرين فقط مثلا:

$$C = \alpha + \beta Y \qquad (5)$$

$$Q_d = \alpha - \beta P$$

$$Q_s = \alpha + \beta P$$

من المعادلة (5) نلاحظ أن هناك علاقة طردية بين الدخل والاستهلاك بحيث إذا زاد الدخل بمقدار ΔY $(Y + \Delta Y)$ يترتب على ذلك زيادة في قيمة C بمقدار ΔC $(C + \Delta C)$، إذن يمكن إثبات أن الميل الحدي للاستهلاك $\beta = \dfrac{\Delta C}{\Delta Y}$

لدينا:

$$C = \alpha + \beta Y \qquad (6)$$

$$C + \Delta C = \alpha + \beta(Y + \Delta Y) \qquad (7)$$

$$C + \Delta C = \alpha + \beta Y + \beta \Delta Y \qquad (8)$$

بإصلاح المعادلتين 6 و 8 نحصل على:

$$\Delta C = \beta\ \Delta Y \Rightarrow \beta = \frac{\Delta C}{\Delta Y}$$

أي أن الميل الحدي للاستهلاك يمثل مقدار الزيادة الحاصلة في الاستهلاك لنسبة زيادة الدخل بمقدار ΔY.

* **العلاقة الخطية العامة** (النموذج الخطي العام): يتكون هذا النموذج من متغيرين مستقلين أو أكثر فكلما زاد عدد المتغيرات كلما أصبحت العلاقة أكثر تعقيدا مما يجعل من الضروري استخدام جبر المصفوفات.

مثلا:

$$Q_d = \alpha + \beta P + \beta_1 Y + U_i \qquad (9)$$

حيث Q_d تمثل الكمية المطلوبة من سلعة معينة، Y دخل المستهلك P سعر السلعة، α و β ثوابت و U_i المتحول العشوائي.

دخول U_i في العلاقة (9) ناتج عن عدة أسباب هي:

- هناك بعض المتغيرات ليست أصلا بيانات إحصائية
- وجود بعض التصرفات ذاتية بالإنسان لا يمكن قياسها
- النموذج المقدر أصلا لا ينطبق على النموذج الواقعي تماما.

جـ - العلاقة غير خطية

هي العلاقة التي تكون متغيراتها الاقتصادية أو البعض منها تحمل أوس أكبر من الواحد و تأخذ عدة أشكال:

$$Y = \alpha + \beta X^2$$
$$Y = AL^{\alpha} K^{\beta}$$
$$LogY = LogA + \alpha LogL + \beta LogK$$

د- العلاقة الاقتصادية الجزئية

هي تلك العلاقة التي تتعلق بالوحدات الاقتصادية وتتناول السلوك الاقتصادي لتلك الوحدات كعلاقة العرض والطلب على سلعة معينة أي علاقة استهلاك المستهلك بسلعة وأسعار تلك السلعة ويمكن كتابتها:

$$Q_d = \alpha + \beta_1 P + \beta_2 P_0 + \beta_3 Y$$

حيث Q_d تشير إلى الكمية المطلوبة من سلعة معينة، P تمثل سعر السلعة موضوع الدراسة، P_0 تمثل أسعار السلع الأخرى، Y تمثل دخل المستهلك و β_3، β_2، β_1، α هي معاملات النموذج.

و- العلاقة الاقتصادية الكلية

هي العلاقة التي تربط بين متغيرات اقتصادية تتصل بالسلوك العام والبنية العامة للاقتصاد بمعنى أن العلاقات الكلية تشمل قطاعات كاملة في الاقتصاد مثل العلاقة الكلية للاستهلاك الوطني، الاستثمار والدخل

الوطني، وتستند هذه العلاقات على المعادلات الهيكلية وعلى التحليل الكلي لمتغيرات الاقتصاد الوطني مثلا نموذج الدخل الوطني:

$$Y = C + I + G \qquad (10)$$

حيث Y الدخل، C الاستهلاك، I الاستثمار و G الإنفاق الحكومي

مثال:

إذا علمت أن نموذج الدخل الوطني محدد بالعلاقة التالية:

$$Y = C + I + G \qquad (11)$$

وكانت بعض متغيرات هذا النموذج مرتبطة بمتغيرات أخرى كما يلي:

$$Y_d = Y - \mathrm{T} \qquad (12)$$

حيث Y_d الدخل القابل للتصرف و T إجمالي الضرائب

$$\mathrm{T} = t\,y \qquad (13)$$

$$C = \alpha + \beta Y_d \qquad (14)$$

$$I = I_0 \qquad (15)$$

المطلوب اختزال هذا النموذج

الحل

بإصلاح المعادلات أعلاه نحصل على:

$$Y = \frac{\alpha + I_0 + G}{1 - \beta + \beta t} \qquad (16)$$

العلاقة الأخيرة تمثل الشكل المختزل التي تستخدم لاستخراج المضاعفات المطلوبة.

م- العلاقة الاقتصادية الساكنة

هي تلك العلاقة التي لا يكون الزمن أحد متغيراتها أو مؤثر في تغيير قيم أحد المتغيرات الداخلة بها، إذا أخذنا مثلا العلاقة الاقتصادية لنموذج ساكن للدخل الوطني في اقتصاد مغلق وللاستثمار والإنفاق الحكومي متغيرات خارجية.

$$
\begin{aligned}
&Y = C + I + G \\
&C = \alpha + \beta Y_d \\
&Y_d = Y - \mathrm{T} \qquad\qquad (17) \\
&\mathrm{T} = t\, y
\end{aligned}
$$

حيث α الحد الثابت، β و t تمثلان معلمات العلاقة.

I الاستثمار و G الإنفاق الحكومي ← متغيرات خارجية

$Y,\ C,\ T,\ Y_d$ ← متغيرات داخلية

وبإصلاح المعادلات السابقة نحصل على:

$$Y = \frac{\alpha + I + G}{1 - \beta + \beta t} \qquad (18)$$

هـ- العلاقة الاقتصادية المتحركة

هي تلك العلاقة التي يكون الزمن أحد متغيراتها أو مؤثر في متغيراتها وتعتبر هذه العلاقة أكثر واقعية.

مثلا إذا كان اقتصاد بسيط مغلق أي ليس فيه علاقات خارجية

$$Y = C + I + G$$
$$C = \alpha + \beta Y$$
$$Y_d = Y - \mathrm{T}$$
$$\mathrm{T} = t\,y$$
$$I = I_0 + i\,Y_{t-1}$$
$$G = G_0$$

عند اختزال هذا النموذج نحصل على:

$$Y = \frac{\alpha + I_0 + i\,Y_{t-1} + G_0}{1 - \beta + \beta t} \qquad (19)$$

3- المعادلات الهيكلية

أ- المعادلات التعريفية

هي عبارة عن العلاقة التي تحدد قيمة المتغير التابع في صورة علاقة مساواة أو بمعنى آخر هي المعادلات التي تعرف أحد المتغيرات بدلالة المتغيرات الأخرى تعريفا غير مشروط مثل الدخل الوطني الذي يساوي الاستهلاك زائد الادخار:

$$Y = C + S \qquad (20)$$

بمعنى أن الدخل Y يذهب بطريقتين هما الاستهلاك C والادخار S [الادخار هو جزء من الدخل الذي لا ينفق على الاستهلاك] والمعادلة

(20) لا توضح لنا ما إذا كان الاستهلاك يزيد أو ينقص أو يبقى على حاله عندما يتغير الدخل.

ب- المعادلات السلوكية

هي عبارة عن المعادلات التي تعبر عن العلاقات الدالية للمتغيرات الاقتصادية في النموذج، أكثر مما تعبر عن كونها متطابقات، أو بمعنى آخر هي المعادلات التي تفسر سلوك أحد المتغيرات اعتمادا على التغيرات التي تحدث في المتغيرات الأخرى.

$$C = \alpha + BY \qquad (21)$$

المعادلة (21) تبيّن أن الاستهلاك *(C)* دالة في الدخل *(Y)* وهي معادلة سلوكية ذات متغير مستقل واحد. ونجد أيضا معادلتي الطلب والعرض هي معادلات سلوكية التي تصف السلوك الاقتصادي للمتغيرات.

$$Q_d = \alpha - \beta P \qquad (22)$$

$$Q_S = \pm\alpha + \beta P \qquad (23)$$

حيث $\alpha, \beta \geq 0$

تبيّن المعادلة (22) أن الكمية المطلوبة من السلعة تزداد في حالة انخفاض السعر والعكس بالعكس ولهذا فإن الإشارة السالبة تعكس العلاقة العكسية بين السعر والكمية المطلوبة من سلعة ما طبقا لما تقترحه النظرية الاقتصادية. والمعادلة (23) توضح العلاقة الطردية بين السعر والكمية

المعروضة من سلعة ما، والإشارة الموجبة تشير إلى تلك العلاقة طبقا لما تقترحه النظرية الاقتصادية.

جـ- المعادلات الفنية

تهتم المعادلات الفنية بتوضيح طبيعة العلاقة بين مستوى الإنتاج من سلعة معينة وبين مدخلات الإنتاج المتمثلة في عنصري الإنتاج العمل ورأس المال وغيرها من العناصر الإنتاجية مثال دالة الإنتاج لكوب دوجلاس.

$$Y = A K^{\alpha} L^{\beta} \qquad (24)$$

حيث Y تعبر عن الناتج و هو دالة في عوامل الإنتاج L العمل و K رأس المال الداخلة في عملية الإنتاج. وهذه العلاقة هي علاقة فنية توضح الكيفية التي يمكن أن يتحقق بها الناتج (Y) باستخدام عناصر الإنتاج وبإتباع أسلوب معين من أساليب الإنتاج، وأن α و β تمثل معلمات الدالة، A عدد ثابت.

بالإضافة إلى هذه المعادلات توجد ما يسمى بالمعادلات التوازنية وهي تشبه المتطابقة من حيث الشكل إلاّ أنها تختلف عنها في كونها لا تتحقق إلاّ تحت شروط معينة ومن أمثلتها شرط التوازن في الاقتصاد الجزئي. وفي حالة حدوث تغيرات تؤدي إلى ابتعاد هذه المعادلات عن التوازن فإنها تتحول إلى معادلات تعريفية.

4- الدوال

هي الصيغة الرياضية التي تتخذها العلاقة بين المتغيرات والمعاملات في الظاهرة الاقتصادية ومن أهم الدوال التي تستخدم في الاقتصاد نجد الدالة اللوغاريتمية والدالة الأسية.

1- الدالة اللوغاريتمية

أ- تعريف الدالة اللوغاريتمية النيبيرية لـ x

يطلق على اللوغاريتم النيبري للعدد الموجب x، ونكتب $Log\ x$ الدالة الأصلية لـ $\frac{1}{x}$ والتي تنعدم من أجل $x = 1$ أي $(\log 1 = 0)$

$$Log\ x = \int \frac{dx}{x} \qquad (x \succ 0)$$

مع الذكر أن هذه الدالة معرفة في المجال $]0 \quad +\infty[$ ومشتقاتها هي:

$$(Log\ x)' = \frac{1}{x}$$

ب- خصائص الدالة اللوغاريتمية النيبرية

تتميز الدالة اللوغارتيمية log والمعرفة في المجال $IR \rightarrow\ ]0\ +\infty[$ بالخصائص التالية:

*الدالة **log** قابلة للاشتقاق بصورة غير منتهية وذلك لأن الدالة

$$x \rightarrow \frac{1}{x}$$

موجودة في المجال $0 < x < +\infty$

* متزايدة لأن مشتقة $\frac{1}{x}$ ← x موجبة في المجال]0 +∞[ومحدبة

لأن:
$$\log'' x = -\frac{1}{x^2} < 0$$

*** لوغاريتم الجذاء**

نعتبر أن الدالة $y = \log a\, x$ حيث a عدد ثابت موجب فإن المشتقة

هي $y' = \frac{a}{ax} = \frac{1}{x}$ [تعادل مشتقة الدالة $\log x$].

ويمكننا كتابة ما يلي:

$$\log a\, x = \log x + K \qquad \textbf{(25)}$$

حيث K عدد ثابت.

إذا وضعنا $x = 1$ في العلاقة السابقة فنحصل على $\log a = K$

أي:

$$\log a\, x = \log x + \log a$$

إذن:

لوغاريتم الجذاء لحدين موجبين يساوي إلى مجموع لوغاريتميهما

*** لوغاريتم الكسر**

إذا كان $c = a/b$ فإن:

$$Log\, a = \log (c.b) = \log c + \log b$$

أي

$$\log c = \log a - \log b$$

ومنه فإن:

$$\boxed{Log \frac{a}{b} = Log\ a - Log\ b}$$

إذن:

لوغاريتم لكسر حدين موجبين يساوي إلى فرق لوغاريتمهما

في حالة خاصة أي $1 = a$ فإن $c=\frac{1}{b}$ ومن ثم يكون

$$Log\frac{1}{b}=-\log b$$

*** لوغاريتم القوى**

في حالة m عدد صحيح و بأخذ $m = 2$ فإن:

$$\log x^2 = \log (x.x) = \log x + \log x = 2 \log x$$

من أجل $m = 3$ فإن:

$$\log x^3 = \log (x^2.x)$$

$$= \log x^2 + \log x = 2 \log x + \log x = 3 \log x$$

يمكن أن نبين باستخدام البرهان بالتراجع:

من أجل كل عدد طبيعي m حيث $m \geq 0$ فإن: $\log x^m = m \log x$

لقد رأينا أن هذه الخاصية محققة من أجل $m = 2$ و $m = 3$ نفرض أنها محققة أيضا في المرتبة $(m-1)$ أي بمعنى أن:

$$\log x^{m-1} = (m-1) \log x$$

$$\log x^m = \log (x \times x^{m-1}) = \log x + (m-1) \log x = m \log x$$

من أجل m عدد صحيح وسالب يكون: $m = -1$ فإن:

$$\log\frac{1}{x}=-\log x$$

و $Log\ x^m = Log\frac{1}{x^{-m}} = Log 1 - Log\ x^{-m} = m\ Log\ x$

إذن يمكن أن نستنتج أنه من أجل m عدد صحيح فإن:

$$\log x^m = m \log x$$

1-2- الدالة الأسية

3-2-1- الدالة الأسية ذات الأساس a $a \neq 1, > 0$

الدالة $\log_a x$ $(a > 0)$ معرفة مستمرة ورتـــيبة تماما في المجـــال]0 ∞[، وتأخذ قيامها من المجال] ∞ ∞-[.

كنتيجة توجد دالة عكسية $x = q\ (y)$ معرفة ومستمرة ورتيبة تماما فـــي المجال]∞ + ∞-[وتأخذ قيامها من المجال]∞ + 0[. فالدالة التي تسمى دالة أسية ذات الأساس a موجبة تماما:

$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = \exp_a (y) = e^y$$

*** خواص الدالة الأسية**

1- $$a^x \times a^{x'} = a^{x+x'}$$

البرهنة

نأخذ اللوغاريتم للأساس a نحصل على:

$$\begin{aligned} \log_a (a^x . a^{x'}) &= \log_a a^x + \log_a a^{x'} \\ &= x \log_a a + x' \log_a a \\ &= x + x' \end{aligned}$$

لأن: $\log_a a = 1$

وعليه فإن: $a^x \times a^{x'} = a^{x+x'}$

2- $(a^x)^{x'} = a^{xx'}$

البرهنة

بأخذ اللوغاريتم للأساس a

$$\begin{aligned} log_a (a^x)^{x'} &= x' Log_a a^x \\ &= x' x Log_a a \\ &= x' x \end{aligned}$$

ومن ثم فإن: $(a^x)^{x'} = a^{xx'}$

الفصل الأول

الاستمرارية - الاشتقاق – التفاضل

و

القيم القصوى لدالة ذات متغير واحد حقيقي

1-1 - الإستمرارية

1-2 - الاشتقاق

1-3- التفسير الهندسي للعدد المشتق

1-4- تعريف النهاية

1-5- التفاضل لدالة ذات متغير واحد حقيقي

1-6- القيم القصوى لدالة بمتغير واحد حقيقي

1-7- تطبيق اقتصادي

التمارين



1-1 - الاستمرارية

1-1-1- استمرارية دالة عند قيمة x_0

إذا كانت $f(x)$ دالة معرفة على المجال المفتوح $\boldsymbol{h}$ ويشمل x_0، نقول أن $f(x)$ مستمرة عند x_0 إذا كانت نهايتها عند x_0 هي $f(x_0)$.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

كما يمكننا القول أن $f(x)$ مستمرة عند x_0 إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي:

$$\forall \xi > 0, \exists \eta > 0 : \forall x \in h(0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \xi)$$

1-1-2- الاستمرارية عند x_0 على اليمين وعلى اليسار

إذا كانت $f(x)$ دالة معرفة على المجال $]\, x_0 \,,\, x_0 + \alpha\, [$، $\alpha > 0$ فتكون $f(x)$ مستمرة عند x_0 على اليمين إذا وفقط إذا كان:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

إذا كانت $f(x)$ دالة معرفة على المجال $]\, x_0 - \alpha \,,\, x_0\, [$، $\alpha > 0$ فتكون $f(x)$ مستمرة عند x_0 على اليسار إذا وفقط إذا كان:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

1-1-3- الاستمرارية على المجال

ليكن I إحدى المجالات من الشكل:

$]-\infty \quad +\infty[$ ، $]-\infty \quad a[$ ، $]a \quad +\infty[$ ، $]a \quad b[$

نقول أن $f(x)$ مستمرة على I إذا وفقط إذا كانت مستمرة عند كل قيمةx من I، إذن:

- نقول أن $f(x)$ مستمرة على المجال المغلق $[a \quad b]$ إذا وفقط إذا كانت:

  $f(x)$ مستمرة من أجل كل x حيث $a < x < b$

  $f(x)$ مستمرة عند a على اليمين

  $f(x)$ مستمرة عند b على اليسار

-نقول أن $f(x)$ مستمرة على المجال $[a \quad b[$ إذا وفقط إذا كانت:

  $f(x)$ مستمرة على المجال $]a \quad b[$

  $f(x)$ مستمرة عند a على اليمين

-نقول أن $f(x)$ مستمرة على المجال $]a \quad b]$ إذا وفقط إذا كانت:

  $f(x)$ مستمرة على المجال $]a \quad b[$

  $f(x)$ مستمرة عند b على اليسار.

1-2- الاشتقاق

1-2-1- قابلية اشتقاق دالة عند نقطة x_0

f دالة معرفة على مجال مفتوح h من IR و $x_0 \in h$ نقول عن الدالة f إنها قابلة للاشتقاق عند x_0 إذا كانت:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$ موجودة ومنتهية

هذه النهاية وحيدة تسمى بـــ "العدد المشتق للدالة $f(x)$ عند القيمة x_0"

1-2-2- قابلية الاشتقاق عند x_0 على اليمين وعلى اليسار

f دالة معرفة على المجال $[x_0 \, ، \, x_0+\alpha[$ و $\alpha > 0$ وتكون f قابلة للاشتقاق عند x_0 على اليمين إذا وفقط إذا كانت:

$$\lim_{x \xrightarrow{>} x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$ موجودة ومنتهية

f دالة معرفة على المجال $]x_0-\alpha, \, x_0]$ و $\alpha > 0$ وتكون f قابلة للاشتقاق عند x_0 على اليسار إذا وفقط إذا كانت:

$$\lim_{x \xrightarrow{<} x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$ موجودة ومنتهية

ملاحظة

حتى تكون f قابلة للاشتقاق عند x_0 يلزم ويكفي أن تكون f قابلة للاشتقاق عند x_0 على اليسار وعلى اليمين وأن يكون:

$$\lim_{x \xrightarrow{>} x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \xrightarrow{<} x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

نظرية

كل دالة قابلة للاشتقاق عند القيمة x_0 فهي مستمرة عند x_0

ملاحظة: عكس النظرية ليس صحيحا

1-2-3- قابلية اشتقاق دالة على المجال

نقـــول عـــن الدالة f المعرفة على المجال $]a \quad b[$ بحيث $a < b$ أنها قابلة للاشتقاق على $[a \quad b]$ إذا وفقط إذا كانت:

1- قابلة للاشتقاق على $]a \quad b[$.

2- قابلة للاشتقاق عند a على اليمين وقابلة للاشتقاق عند b على اليسار.

مثال:

لتكن $f(x)$ دالة عددية معرفة على IR^+ كما يلي:

$$f(x) = 2\sqrt{x} \qquad si: 0 \le x \le 1$$

$$f(x) = a(x^2-1) + b(x-1) + 2: \quad si\ x > 1$$

حيث a و b عددان معلومان

مطلوب:

1- هل $f(x)$ مستمرة على IR^+ ؟

2- ما هو الشرط اللازم والكافي الذي يحققه العددان a و b حتى تكون $f(x)$ قابلة للاشتقاق عند $x = 1$

3- عبر عندئذ عن b بدلالة a.

الحل:

تكون $f(x)$ الدالة المعرفة على IR^+ كما يلي:

$$f_1(x) = 2\sqrt{x}$$
$$f_2(x) = a(x^2-1) + b(x-1) + 2$$

نلاحظ أن $f_1(x)$ و $f_2(x)$ مستمرتان على مجموعة تعريفهما، فتكون بذلك $f(x)$ مستمرة على الأقل على $]0\ \ 1[\ \cup\ ]1\ +\infty[$.

دراسة الاستمرارية عند $x=1$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ <}} f_1(x) = 2\sqrt{1} = 2$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ >}} f_2(x) = 2$$

أي:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x) = 2$$

وعليه فأن $f(x)$ مستمرة على IR^+

2) قابلية للاشتقاق عند $x = 1$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{a(x^2-1)+b(x-1)+2-2}{x-1}$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{a(x^2-1)+b(x-1)+2-2}{x-1}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{(x-1)\left[a(x+1)+b\right]}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1} a(x+1) + b = 2a + b$$

$$\lim_{\substack{< \\ x \to 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{< \\ x \to 1}} \frac{2\sqrt{x} - 2}{x-1}$$

$$= \lim_{\substack{< \\ x \to 1}} \frac{2(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = 1$$

وتكون $f(x)$ قابلة للاشتقاق عند $x = 1$ إذا وفقط إذا كان $2a + b = 1$ وفي حالة $b = 1 - 2a$

1-2-4- دالة المشتق

نقول عن الدالة f المعرفة على المجال مفتوح ***h*** أنها قابلة للاشتقاق على هذا المجال، إذا وفقط إذا كانت قابلة للاشتقاق عند كل قيمة من هذا المجال.

نسمي دالة المشتق للدالة f ونرمز لها بـ 'f، التطبيق المعرف من ***h*** في IR والذي يرفق بكل عدد حقيقي x من ***h*** العدد المشتق للدالة f عند x أي أن:

$$f' : h \to IR$$
$$x \to f'(x)$$

1-2-5-المشتقات المتعاقبة

إذا كانت f قابلة للاشتقاق على المجال $]a \quad b[$، وإذا كانت f' قابلة للاشتقاق على $]a \quad b[$ ، نرمز لدالتها المشتقة "f [المشتقة

الثانية للدالة f]. وهكــذا نعرف المشتقات المتعاقبة للدالة f بـــــ f' ،
f'', ..., f^{n} المشتقة من المرتبة n للدالة f [إن وجـــدت] هـــي مـــشتقة
دالـــــة المشتق من المرتبة $n-1$ و:

$$f^{n} = [f^{n-1}]' \quad \text{حيث} \quad n \in N^*$$

1-2-6-عمليات على الدوال القابلة للاشتقاق

f و g دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال h و α عدد حقيقي.

المشتقة	الدالة
$f' + g'$	$f + g$
$\alpha f'$	αf
$f'g + fg'$	fg
$-\frac{f'}{(f)^2}$	$\frac{1}{f}$
$\frac{f'g - fg'}{(g)^2}$ بشرط أن g لا تنعدم على h	$\frac{f}{g}$

1-2-7- مشتقات دالة مركبة

إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق على $]a \quad b[$، g دالة قابلة للاشتقاق عند كل قيمة من $f(]a \quad b[)$ فالمركبة $g\,of$ دالة قابلـــة للاشـــتقاق على $]a \quad b[$ وأن

$$\forall x_0 \in h: (g o f)'(x_0) = g'[f(x_0)]\, f'(x_0)$$

أي:

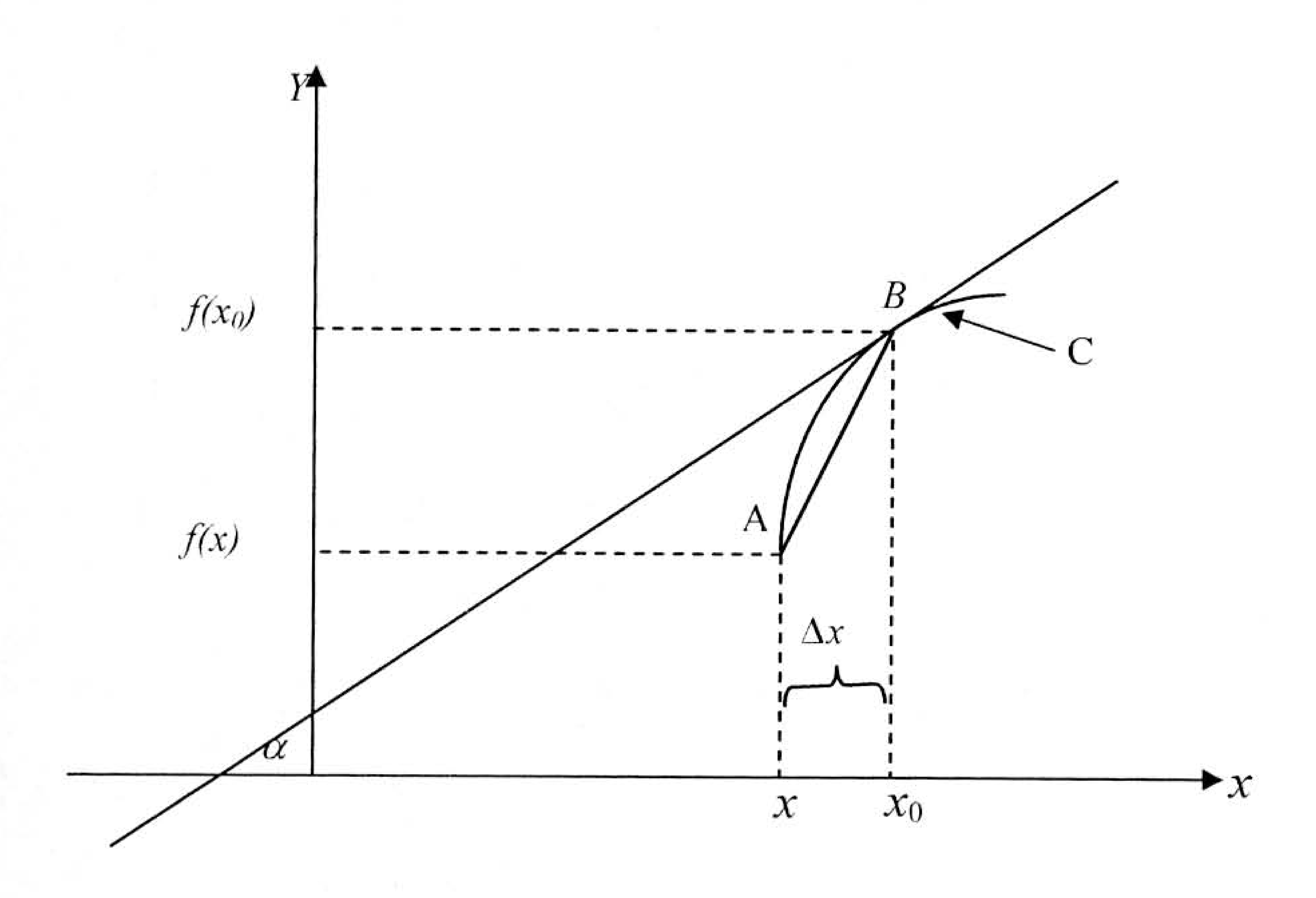
$$(g o f)' = (g' o f)\, f'$$

1-3- التفسير الهندسي للمشتق

ليكن المنحنى C بيان الدالة f ولتكن النقطتان B و A من C ذات الإحداثيات $(x_0, f(x_0))$ و $(x, f(x))$ على الترتيب.

إذا كان $x \neq x_0$ فإن $B \neq A$ وعند ئذا يكون ميل المستقيم AB هو:

$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند النقطة x_0 فإن المستقيم AB يؤول إلى مستقيم مماس عند النقطة B لـC عندما تؤول A إلى B ويكون عندئذ $f'(x_0)$ هو ميل المماس عند B لـC .



ضف إلى ذلك فإن التفسير الهندسي للنسبة $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ميل (AB) يوضح أن مشتق f عند النقطة x_0 يساوي ميل المماس عند النقطة A ذات الفاصلة x_0.

فإذا أشرنا للزاوية التي يشكلها محور ox والمماس عند A بـ α فإننا نجد:

$$f'(x_0) = tg\ \alpha$$

خلاصة

المشتق هو الميل الزاوي لمماس الخط البياني للدالة في النقطة المفروضة A.

ملاحظة

1- إذا كانت f قابلة لاشتقاق عند x_0 على اليمين معامل توجيه كل منهما وقابلة للاشتقاق عند x_0 على اليسار والمشتق من اليمين يختلف عن المشتق من اليسار، فإن منحنى
الدالة f يقبل نصفي ممسين من اليمين ومن اليسار،
العدد المشتق من اليمين والعدد المشتق من اليسار على الترتيب.

2- إذا كانت $\lim_{x \to x_0}\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right| = +\infty$ فإن منحنى الدالة يقبل عند النقطة التي فاصلتها x_0 مماسا يوازي محور التراتيب [معادله $x = x_0$].

ووفق ما ذكر أعلاه فإن المشتقة هي عبارة عن نهاية نسبة بين المتغير الدالة Δy والمتغير المستقل Δx لما يؤول هذا الأخير إلى x_0 وعلى هذا الأساس يمكن أن نعرف النهاية.

1-4- تعريف النهاية

نقول عن الدالة f معرفة في جوار لـــ x_0 أن لها نهاية L عندما ينتهي x إلى x_0 إذا كان من أجل كل $\varepsilon \succ 0$ يوجد عدد $\eta \succ 0$ بحيث أنّه إذا كان $x \neq x_0$ و $|x - x_0| \prec \eta$ يكون لدينا $|f(x) - f(x_0)| \prec \varepsilon$

وباختصار فإن:

$$\forall \varepsilon \succ 0, \exists \eta \succ 0 / \forall x : 0 \prec |x - x_0| \prec \eta \Rightarrow |f(x) - L| \prec \varepsilon$$

ومنه نكتب: $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$

انطلاقا من التعاريف المذكورة أعلاه يمكن البرهنة على المشتقة كما يلي:

- نعطي للمتغير (x) زيادة (Δx) ونقوم بحساب العبارة

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

- نشكل العبارة الكسرية لـــ Δy بالنسبة لـــ Δx ونقوم بعملية الاختزال.

- بحث عن $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

مثـــال:

أوجد $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ للدالة $y = x^2 - 3x - 1$

إذن:

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x) - 1$$

$$\Delta y = x^2 + 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2 - 3x - 3\,\Delta x - 1 - y$$

نعوض عن y بقيمتها وبعد الإصلاح نحصل على:

$$\Delta y = 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2 - 3\,\Delta x$$

نقسم الطرفين على Δx

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\,\Delta x + (\Delta x)^2 - 3\,\Delta x}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x - 3$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x - 3 = y'_{(x)}$$

أهم المشتقات لدوال معينة ملخصة في الجدول التالي:

الدالة	المشتقة
$y =$ عدد ثابت	$y' = 0$
$y = x^n$	$y' = n\,x^{n-1}$
$y = \sqrt{f(x)}$	$y' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
$y = \log f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$
$y = e^{f(x)}$	$Y' = f'(x).e^{f(x)}$
$y = b^{f(x)}$	$Y' = f'(x).b^{f(x)}.\log b$
$y = f(x)^{g(x)}$	$y' = y\left[g'(x).\log f(x) + \frac{f'(x)}{f(x)}g(x)\right]$
$y = [f(x)]^n$	$y' = n\,[f(x)]^{n-1} \times f'(x)$

1 -5- التفاضل لدالة ذات متغير واحد حقيقي

إذا اعتبرنا $y = f(x)$ كدالة فإن مشتقاتها تأخذ الشكل التالي:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{dy}{dx} \qquad (1-1)$$

فالرمز $\frac{dy}{dx}$ يمثل الرمز الوحيد للمشتقة، أما في حالة التفاضل يمكن أن نعتبر أن:

$$\Delta y \equiv (\Delta y / \Delta x) \Delta x \qquad (1-2)$$

إذن تغير Δy لـ y يطابق جذاء لمعدل التغير $\Delta y / \Delta x$ لـ y ولتغير Δx لـ x. وإذا كانت التغيرات تنتهي إلى نهاية لا متناهية فإن معدل التغير لـ y يأخذ الشكل التالي $\frac{dy}{dx}$ وتغيرات كل من x و y تأخذ الشكل التالي dx و dy على التوالي وتصبح المعادلة $(1-2)$ كالآتي:

$$dy \equiv (dy / dx)\, dx$$
$$dy \equiv f'(x)\, dx \qquad (1-3)$$

ويطلق على الرمزين dx و dy اللذان يمثلان تغيرات التي تنتهي إلى نهاية لا متناهية لكل من x و y بالتفاضل لـ x و لـ y.

وعليه فإن التفاضل الدالة (y) يساوي جذاء المشتق بتفاضل المتغير المستقل x كما توضحه المعادلة $(1-3)$.

خواص التفاضل

تنتج خواص التفاضل مباشرة من خواص المشتق.

- تفاضل جمع دالتين

$$y = u(x) + v(x)$$
$$y' = u'(x) + v'(x)$$
$$dy = y'dx = (u' + v')dx$$
$$dy = du + dv$$

- تفاضل جداء دالتين

$$y = u(x).\ v(x)$$
$$y' = u'v + v'u$$
$$dy = y'dx = u'vdx + v'udx$$
$$= vdu + udv$$

- تفاضل حاصل قسمة دالتين:

$$y = \frac{u(x)}{v(x)}$$
$$y' = \frac{vu' - uv'}{[v(x)]^2}$$
$$dy = y'dx = \frac{vu'dx - uv'dx}{v^2}$$
$$dy = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$$

1-6-مشتقة وتفاضل الدالة اللوغاريتمية

إذا كانت $y = f(x)$ نسمي مشتقة لوغاريتمية لـ y، مشتقة لـ log $|y|$ بحيث:

$$\frac{y'}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

ويصبح التفاضل للوغاريتم هو:

$$\frac{dy}{y}=\frac{f'(x)dx}{f(x)}=\frac{df}{f}$$

y	مشتقة اللوغاريتم	تفاضل اللوغاريتم
$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{u'}{u}-\frac{v'}{v}$	$\frac{du}{u}-\frac{dv}{v}$
$u(x).v(x)$	$\frac{u'}{u}+\frac{v'}{v}$	$\frac{du}{u}+\frac{dv}{v}$
$[u(x)]^n$	$\frac{nu'}{u}$	$n\frac{du}{u}$
$\frac{[u(x)]^m}{[v(x)]^p}$	$m\frac{u'}{u}-p.\frac{v'}{v}$	$m\frac{du}{u}-P\frac{dv}{v}$

جـ- مشتقة الدالة $y=a^x$ لمختلف القيم الموجبة لـ a

$y=a^x$ دائما معرفة ومستمرة ورتيبة ودالتها العكسية لها خصائصها.

مشتقة لـ $y=a^x$ هي:

فإذا كان:

$$x=\log_a y=\frac{\log y}{\log a}$$

$$x'_y=\frac{1}{y\ \log a}=\frac{1}{a^x\ \log a}$$

$$y'_x=(a^x)'=a^x\log a$$

في حالة خاصة لما $a = e$ [أساس للوغاريتم النيبري] $y = e^x$ لها مـــشتقة تســـــاوي $e^x Loge$ أي e^x.

يمكن أن نستنتج أن:

[الدالة a^x متناسبة مع مشتقاتها بينما الدالة $y = e^x$ تساوي مشتقاتها].

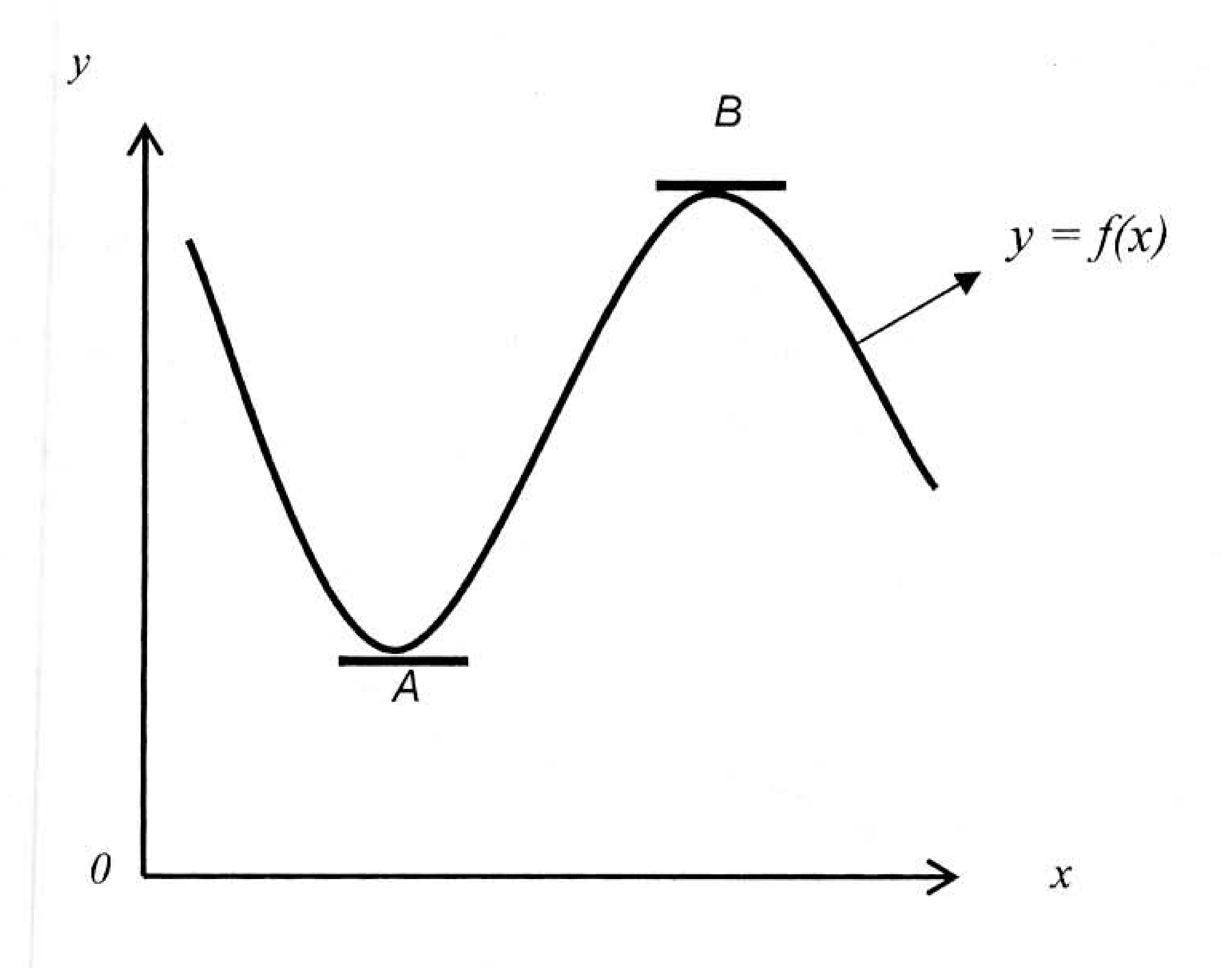
من أجل $a>1$، $log\, a > 0$ ، $y' > 0$ فإن:

$y = a^x$ دالة متزايدة

من أجل $a < 1$، $log\, a < 0$ ، $y' < 0$ فإن:

$y = a^x$ *دالة متناقصة*

1-7- القيم القصوى لدالة بمتغير واحد حقيقي: $y = f(x)$



إن النقطتين $(A$ و $B)$ الظاهرتان على منحنى $y = f(x)$ تؤكد على وجود قيم قصوى وهذا تحت الشرط اللازم أن المشتق الأول $f'(x) = y'$] ميل منحنى $\frac{dy}{dx}$] يساوي الصفر.

فإذا كانت $y = f(x)$، وكانت قابلة للاشتقاق عند x_0 أي $f'(x_0) = 0$ تكون القيم القصوى لهذه الدالة في النقطتين x_0 كما يلي:

- عند النقطة (A) وبزيادة x فإن إشارة $f'(x)$ تتغير من السالب إلى الموجب ومن ثم تحقق قيمة صغرى أي:

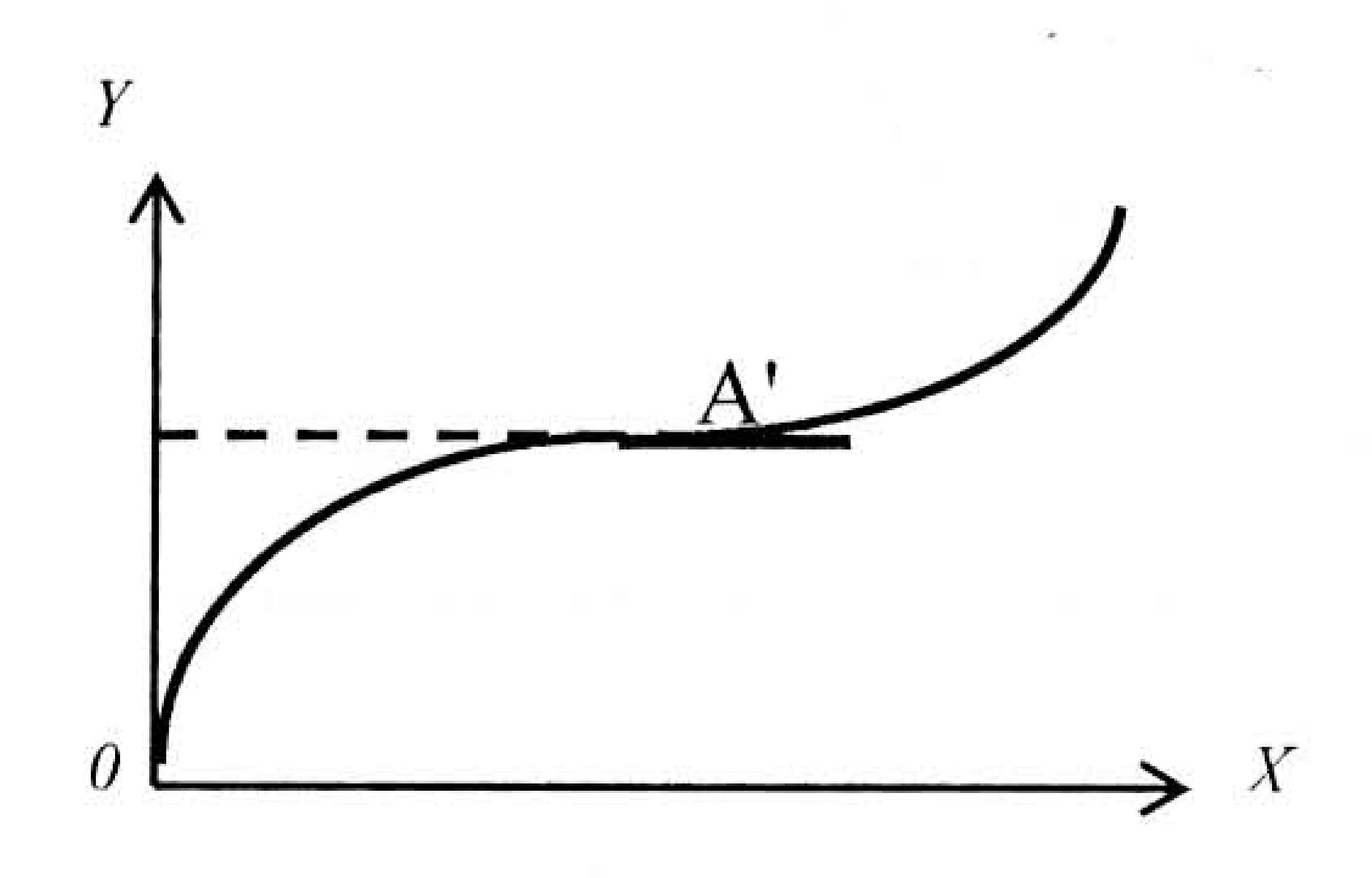
"قيمة صغرى $\Leftarrow$ $f'(x) \leq 0$ على يسار x_0 و $f'(x) \geq 0$ على يمين x_0"

- عند النقطة (B) وبزيادة x فإن إشارة $f'(x)$ تتغير من الموجب إلى السالب ومن ثم تحقق قيمة عظمى أي:

قيمة عظمى $\Leftarrow$ $f'(x) \geq 0$ على يسار x_0 و $f'(x) \leq 0$ على يمين x_0

ملاحظة:

إذا كانت إشارة $f'(x)$ لا تتغير على يسار ويمين النقطة x_0 فتحقق ما يسمى بنقطة انعطاف وتوضح في الشكل التالي:



عند النقطة A' فإن المشتقة $f'(x) = 0$ وبالتـــالي فـــإن $f(A)$ هـــي القيمـــة القصوى إلاّ أنها لا تحقق قيمة عظمى أو صـــغرى لأن إشـــارة $f'(x)$ لا تتغير [موجب إلى موجب] لذلك فالنقطة (A') تمثل نقطة إنعطاف.

مثال 1:

إذا كانت $f(x) = x^2 - 6x - 3$

فإن: $f'(x) = 2x - 6$

لما $f'(x) = 0$

فإن: $x = 3$ و $f(3) = -12$

وعليه فإن (12 − و3) تحقق قيمة قصوى، ما نوعيتها ؟ نقوم بدراسة قيم x بجوار $x=3$

لما $x < 3$ فإن $f'(x) < 0$

$x > 3$ فإن $f'(x) > 0$

ومن ثم فإن (12 - ,3) تمثل قيمة صغرى.

يمكن التأكد من القيم القصوى عن طريق المشتق الثاني $f''(x)$ للدالة:

$$y = f(x)$$

فإذا كانت $f'(x) = 0$ عند النقطة $x = x_0$ كشرط لازم فإنه عن طريـــق إشارة المشتق الثاني نتأكد من وجود قيمة قصوى لهذه الدالة فإذا كانت:

$f''(x) > 0$ وجود قيمة صغرى

$f''(x) < 0$ تعني وجود قيمة عظمى

1-8- تطبيق اقتصادي

يقوم التطبيق الاقتصادي على المفاهيم الحدية للمتغيرات الاقتصادية مثلا:

- **التكاليف الحدية:** هي التغير في التكاليف الكلية CT الذي يترتب على إنتاج وحدة إضافية من Q ويرمز لها بـ cmg إذن:

$$cmg = CT' = \frac{\Delta CT}{\Delta Q}$$

- **الإيراد الحدي:** هو التغير في الإيراد الكلي RT الذي يتحقق ببيع وحدة إضافية من Q ويرمز له بـ Rmg إذن:

$$Rmg = RT' = \frac{\Delta RT}{\Delta Q}$$

- **المنفعة الحدية:** هي التغير في المنفعة الكلية UT الذي يترتب عن استهلاك للمستهلك لوحدة إضافية من سلعة Q ويرمز لها بالرمز Umg إذن:

$$Umg = UT' = \frac{\Delta UT}{\Delta Q}$$

ولذلك يمكن التعبير عن التكاليف الحدية cmg أو الإيراد الحدي Rmg أو المنفعة الحدية Umg كمشتقات للدوال الكلية الخاصة لكل منهم.

وبشكل عام يكون المفهوم الحدي لأي دالة اقتصادية تعبيرا اقتصاديا عـــن مشتقة المفهوم الكلي لهذه الدالة.

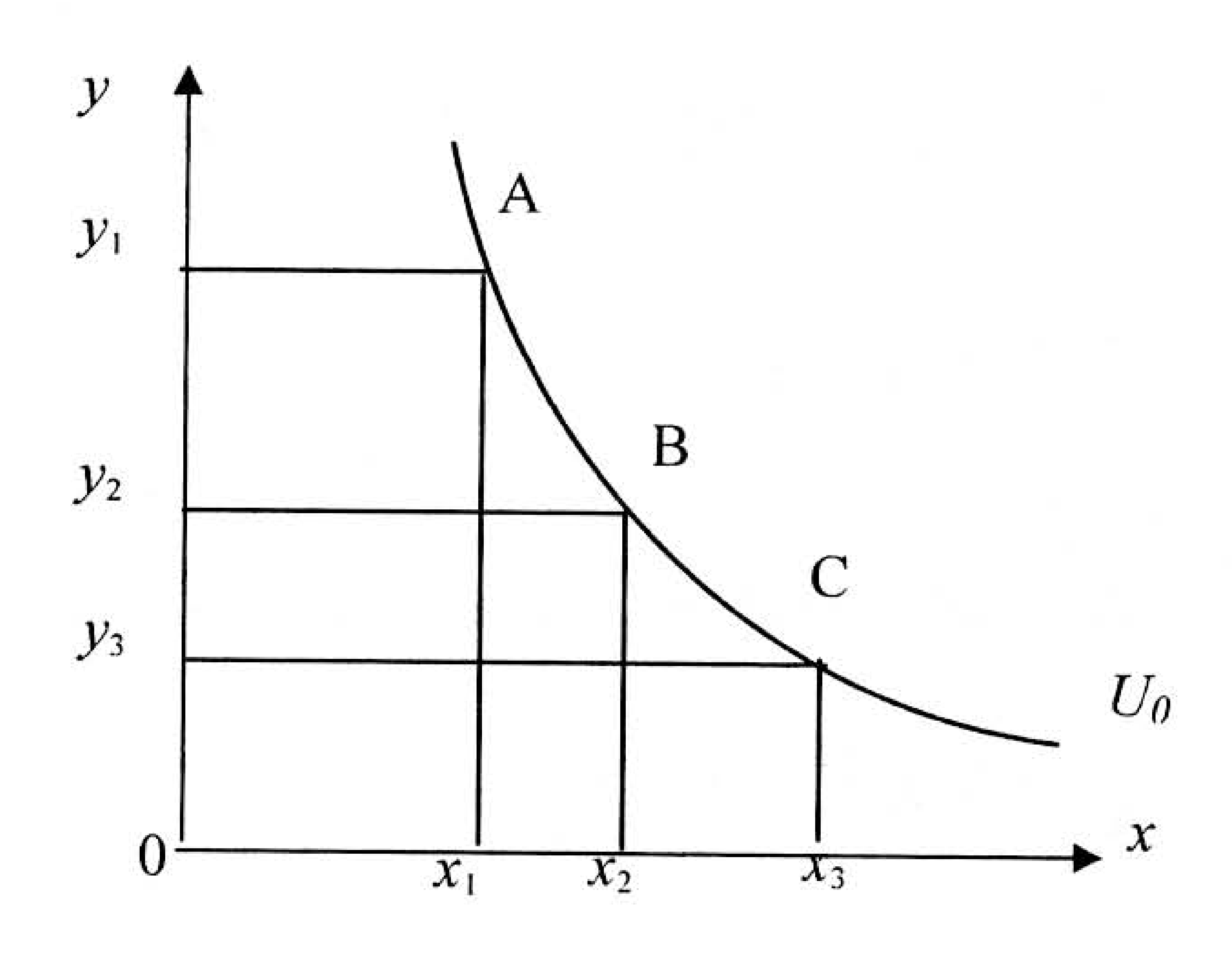
1-8-1- دالة المنفعة التي تحوي على متغيرين الممثلين لسلعتين

فإذا كانت دالة المنفعة معرفة بالعلاقة التالية:

$$U = u(x, y) \qquad (1-4)$$

والسلعتان قابلتان للتجزئة بشكل لا متناهي هذا ما يجعل دالة المنفعة دالة رياضية مستمرة، بالإضافة إلى وجود علاقة إحلال وإبدال ما بين السلعتين x و y.

يوجد ما يسمى في الاقتصاد بمنحنيات السواء التي يمكن أن نعبر عنها رياضيا بالمحل الهندسي للنقاط التي تمثل مجموعة التركيبات من (x و y) التي تتيح للمستهلك نفس مستوى الإشباع كما يوضحه الشكل البياني أدناه.



من الشكل أعلاه النقاط A , B, C سواء لدى المستهلك (تحقق له نفس المنفعة أي نفس مستوى الإشباع) وبالتالي فإن $U_0 = u(x, y)$.

نلاحظ أيضا أن منحنى السواء متناقص (له ميل سالب) ويقصد به اقتصاديا أنه عند زيادة استهلاك الكمية من x فإن من الضروري تخفيض كمية من y للحفاظ على نفس مستوى الإشباع بمعنى الإبقاء على نفس منحنى السواء.

البرهنة الرياضية

نعلم بأن منحنى السواء المتناقص ليس إلاّ تعبيرا عن طبيعة العلاقة بين (x وy) على طول هذا المنحنى الذي يمثل في الحقيقة العلاقة الدالية التالية:

$$y = f(x)$$

وعليه يمكن تبيان أن منحنى السواء هو عبارة عن دالة متناقصة أي أن مشتق هذه العلاقة سالب $dy / dx < 0$.

من دالة منحنى السواء أي العلاقة (4-1)

فإن:

$$U_0 = u(x, y) \qquad (1\text{-}5)$$

حيث U_0 تمثل مستوى الإشباع الثابت.

عند حساب التفاضل الكلي الأولي للعلاقة (5-1) نحصل على:

$$dU_0 = u'(x)dx + u'(y)dy \qquad (1\text{-}6)$$

وبما أن مستوى الإشباع ثابت فان dU_0 (مشتقة العدد الثابت تساوي صفر) من (6-1) نحصل على:

$$u'(x)dx = -u'(y)dy$$

إن الطرف $\frac{U'(x)}{U'(y)}$ هو طرف موجب أي $\frac{U'(x)}{U'(y)} > 0$ وبعبارة أخرى فإن المنافع الحدية تمثل قيمة موجبة ومن ثم فإن $-\frac{dy}{dx} > 0$.

وبما أن هناك عملية إحلال بين x بـ y أو y بـ x بشرط الحفاظ على نفس مستوى الإشباع (نفس المنفعة) فإن حساب مقدار الإحلال يتم بإستخدام المعدل الحدي للإحلال TMS_{xy} الذي يشير إلى القيمة المطلقة لميل المماس عند نقطة ما من نقاط منحنى السواء.

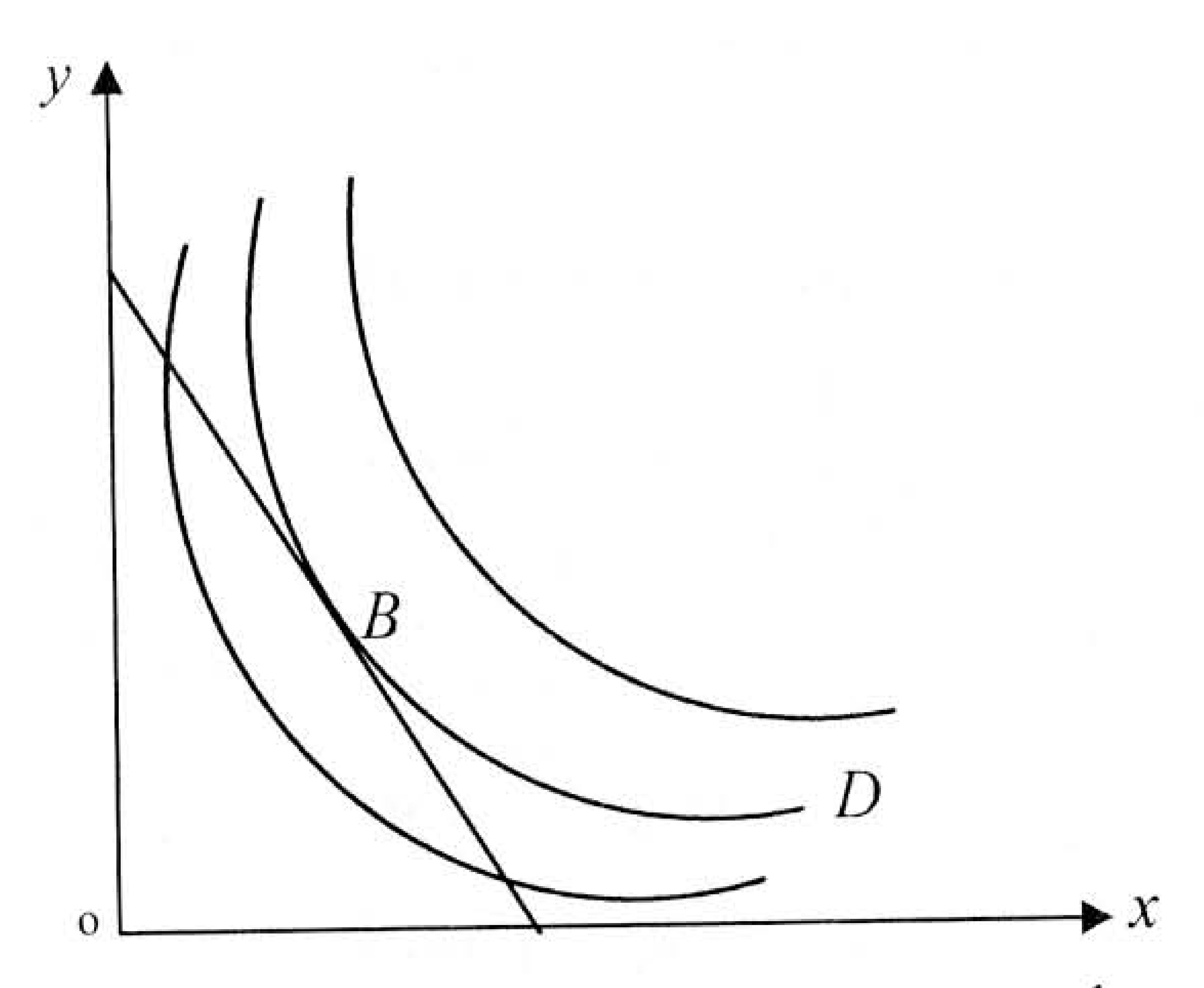
ولذلك يمكن التعبير عن TMS بين x و y أنه عبارة عن نهاية نسبة بين القيمة Δy التي يكون المستهلك مستعد التنازل عنها والكمية Δx التي يهدف بالمقابل الحصول عليها بشرط بقاء على مستوى الإشباع ثابت (على نفس منحنى السواء) أي:

$$TMS_{xy} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{dy}{dx} \qquad (1-7)$$

مع أن:

$$U_0 = u(x, y)$$

وإذا نظرنا إلى الشكل أدناه يتحدد مماس نقطة التي تحقق أحسن مستوى إشباع وهذا باستخدام معادلة الميزانية ($R = xP_x + yP_y$) حيث R يمثل الدخل، P_x، P_y أسعار السلعتين x و y على التوالي.



من الشكل أعلاه نلاحظ أن النقطة B تعتبر التركيبة التي تحقق أعظم إشباع لأنها تقع على مماس المنحنى السواء D.

1-8-2- المرونة

هي تعكس مدى استجابة تغير الدالة إلى تغير المتغير دون ارتباط هذا المفهوم بوحدات القياس.

لتكن الدالة y المعرفة بالعلاقة $y=f(x)$ ولنعطي للمتغير x التزايد Δx فتأخذ الدالة y تزايدا مقابلا Δy، تمثل الكمية $\frac{\Delta y / y}{\Delta x / x}$ نسبة التغير النسبي للدالة إلى التغير النسبي للمتغير الناتج من جراء تغير x بمقدار Δx. لنرمز بـ Ey / Ex إلى نهاية هذه النسبة إن وجدت عندما تنتهي Δx إلى الصفر، ومن ثم اصطلاحا بمرونة الدالة y بالنسبة لـ x لدينا:

$$\frac{Ey}{Ex} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y / y}{\Delta x / x} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} \qquad (1-8)$$

حيث $\frac{Ey}{Ex}$ تعبر عن مدى التغير النسبي للدالة وتكون على الشكل نسبة مئوية عندما تتغير القيمة النسبية للمتغير بمقدار 1%.

مثال:

نبحث عن مرونة الدالة $y = 5x - 6$ من أجل $x = 2$

من قانون المرونة: $\frac{Ey}{Ex} = \frac{dy}{dx} \times \frac{x}{y}$

$$= 5 \times \frac{x}{y} = \frac{5x}{5x-6}$$

ومن أجل $x = 2$ فإن: $\frac{Ey}{Ex} = 2{,}5$

عندما يتزايد x بمقدار 1% اعتبارا من $x = 2$ يتزايد y بحوالي 2,5%.
يتضح مما تقدم أن المرونة هي محصلة جذاء قيمتين الأولى هي مشتقة الدالة المدروسة والثانية هي النسبة بين المتغير والدالة.

ملاحظة

يمكن أن تعرف مرونة الدالة $y=f(x)$ بالنسبة للمتغير x بأنها التفاضل اللوغاريتمي لـ y إلى التفاضل اللوغاريتمي لـ x أي على التوالي $d(\log x), d(\log y)$ أي:

$$\frac{d(\log y)}{d(\log x)} = \frac{dy/y}{dx/x} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} \qquad (1-9)$$

أ- مرونة الطلب بالنسبة للسعر

تعرف مرونة الطلب بالنسبة للسعر Ed لدالة الطلب $D=f(x)$ (x متغير مستقل يعبر عن السعر) التي تعطى بالعلاقة التالية:

$$Ed = \lim \frac{\Delta d / d}{\Delta x / x} = \frac{\Delta d}{\Delta x} \times \frac{x}{d}$$

$$= d' \times \frac{x}{d}$$

تكون هذه النسبة في أغلب الأحيان سالبة (وهذا يتوافق مع النظرية الاقتصادية وجود علاقة عكسية بين الكمية المطلوبة وسعرها). حيث تعبر قيمتها المطلقة بشكل تقريبي عن مدى التناقص بالنسبة المئوية للكمية المطلوبة عندما يتزايد سعر السلعة بمقدار 1% من السعر نفسه.

مثال

لتكن دالة الطلب معرفة بالعلاقة التالية: $y=200-20x$ حيث y الكمية المطلوبة و x سعرها.

المطلوب:

أوجد مرونة الطلب في حالة $x=2, x=5$.

حسب مفهوم المرونة فإن:

$$ed = \frac{\Delta y}{\Delta x} \times \frac{x}{y} = -20 \times \frac{x}{200-20x}$$

عندما $x=2$ فإن

$$ed = -20 \times \frac{2}{200-20(2)} = -2,5$$

وهذا يعني أنه كلما أزداد سعر السلعة بمقدار 1% يتناقص الطلب بمقدار 0,25% وهذا عندما يكون السعر $x=2$.

عندما $x=5$ فإن

$$ed = -20 \times \frac{5}{200-20(5)} = -1$$

هذا يدل على أن الطلب متكافئ المرونة لأن السعر والطلب يتغيران بنسبة تعادل 1%.

ب- مرونة العرض بالنسبة للسعر

تعرف مرونة العرض بالنسبة للسعر Es لدالة العرض $S=f(x)$ التي تعطى بالعلاقة التالية:

$$Es = \lim \frac{\Delta S / S}{\Delta x / x} = \frac{\Delta S}{\Delta x} \times \frac{x}{S}$$
$$= S' \times \frac{x}{S}$$

وتكون هذه النسبة في أغلب الأحيان موجبة وهذا يتوافق مع النظرية الاقتصادية وجود علاقة طردية بين الكمية المعروضة والسعر. وبذلك تعبر قيمة ES بشكل تقريبي عن مدى تزايد بالنسبة المئوية للكمية المعروضة عندما يتزايد سعر السلعة بمقدار 1% من السعر نفسه.

مثال:

ليكن لدينا دالة العرض التالية: $y=-4+4x$ أوجد مرونة العرض عندما $x=3$.

من مفهوم المرونة فإن:

$$Es = \frac{\Delta y_s}{\Delta x} \times \frac{x}{y_s} = 4 \times \frac{x}{-4+4x}$$

عندما $x=3$ فإن:

$$Es = 4 \times \frac{3}{-4+4(3)} = 1,5$$

وهذا يعني أنه كلما أزداد سعر السلعة بمقدار 1% يزداد العـــرض مـــن السلعة بمقدار 1,5% وهذا عندما يكون السعر $x = 3$

1-8-3- الدالة اللوجيستية

توضح هذه الدالة مراحل النمو في أجزائه المختلفة، أي النمو يكون بطيئا في بادئ الأمر ثم يبدأ في الإقلاع بعد حد معين، ثم تبدأ مرحلـــة النمو السريع، ثم يأخذ النمو في التباطؤ، بحيث يظل عند مستوى معـــين، وقد تظهر هذه التغيرات مثلا في تحديد نمو المبيعات لمؤسسة ما.

يتحدد الشكل العام لدالة اللوجيستية كما يلي:

$$y = \frac{C}{\left(1 + b\ e^{-ax}\right)} \qquad (1-10)$$

حيث y و x هما متغيران موضوع الدالة، أما $a,b,c > 0$ هي معلمـــات هذه الدالة والتي تصبح ثوابت بعد إيجاد قيمها بالنسبة لعلاقة محددة تكون موضوع البحث.

مجموعة تعريف هذه الدالة IR و هي متزايدة لأن:

$$y'(x) = \frac{a\ b\ c\ e^{-ax}}{\left(1 + be^{-ax}\right)^2} > 0 \qquad \text{مهما يكن } x$$

بالإضافة إلى ذلك فإن $f'(x)$ موجودة بين 0 و C.

ويمكن التحقق أن هذه الدالة تقبل نقطة انقلاب عنـــد $x=\frac{1}{a}Log\ b$ لأن المشتق الثاني:

$$y''(x)=\frac{a^2bc\,e^{-ax}\left(b\,e^{-ax}-1\right)}{\left(1+be^{ax}\right)^3}$$

لدالة y منعدم بينما إشارة المشتق الأول موجبة من اليمين واليسار عنـــد $x=\frac{1}{a}\log\ \ b$.

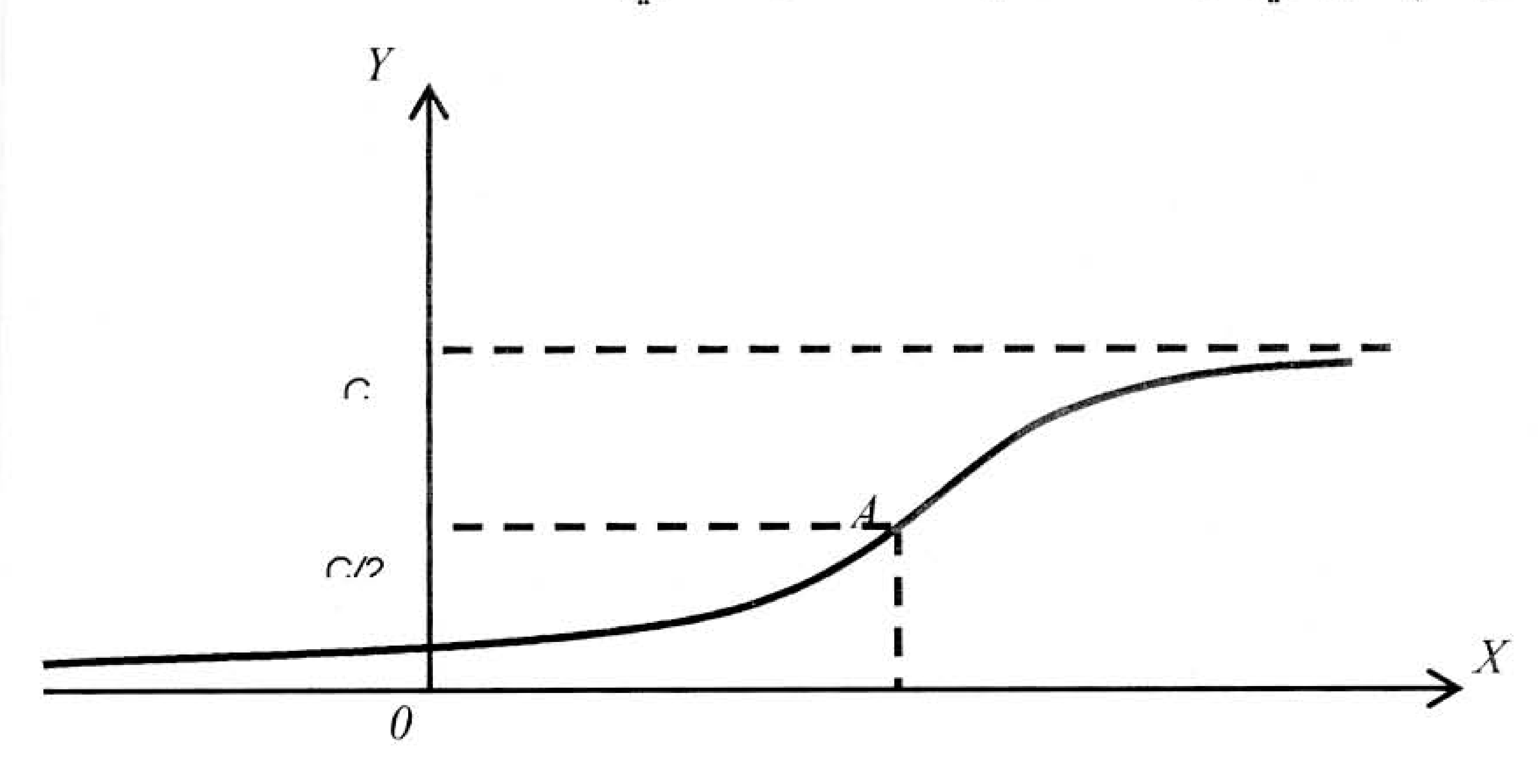
أي: $y\leftarrow 0$ لما $x\leftarrow$ ‎-∞

$y\leftarrow$ c لما $x\leftarrow$ + ∞

كمـــا أن إحداثية النقطة A الموضحة في الشكل العـــام للدالـــة بالنـــسبة للفواصل هي:

$\frac{1}{a}\log b$ وللتراتيب C/2 ومشتقة $f'(1/a\ Log\ b)$ تساوي $\frac{ac}{2}$.

فالرسم البياني لهذه الدالة يأخذ الشكل التالي:



من الرسم البياني يتضح منحنى الدالة اللوجستية $f(x)$ أنها تؤول إلى العدد الثابت c لما x تؤول إلى ما لا نهاية.

1-8-4-معدل نمو آني (لحظي)

إذا أخذت الدالة العلاقة التالية:

$$V = A\,e^{rt}$$

فهذه الدالة تبين نمو بمعدل متزايد لأي متغير (كنمو السكان، نمو الثروات... إلى آخره). فالأس r يوضح معدل النمو الآني لـ $A\,e^{rt}$.

يتحدد معدل التغير V بالنسبة لـ t كما يلي:

$$\frac{dv}{dt} = rAe^{rt} = rV \qquad (1-11)$$

يتضح أن معدل نمو V هو معدل تغير الظاهر بشكل نسبي كنتيجة منطقية في أي لحظة t ويمكن أن نكتب:

$$\frac{dv/dt}{v} = \frac{rv}{v} = r \qquad (1-12)$$

حيث $r = v$ أي معدل النمو.

من العلاقة $(1-12)$ يتبين أن (r) معدل النمو (بنسبة مئوية ثابتة) لحظي لـ V.

1-8-5- تحليل توازن السوق

أ- مفهوم التوازن

للتوازن مفاهيم عدة أهمها هي الحالة التي تتميز بغياب أي اتجاه نحو التغير، ولهذا يشار إلى تحليل التوازن بالتحليل الساكن.كما أن التوازن يمثل وصفا مثاليا ولكن مثل هذه النتيجة غير مضمونة حتى بالرغم من أن وصفا معينا للتوازن قد يتوافق مع وضع مرغوب مثال:وضع التوازن في حالة تعظيم الأرباح وذلك من وجهة نظر المؤسسة، ولكن وضعا توازنيا آخر قد لا يكون مثاليا ومن ثم فهو وضع يجب تجنبه مثل وضع التوازن للدخل الوطني مع وجود بطالة.

ب- توازن السوق تحوي على سلعة واحدة

عند دراسة السوق الخاص لسلعة واحدة يصبح من الضروري معرفة الكمية المطلوبة من السلعة X_d والكمية المعروضة من X_S والسعر P، ومن ثم وضع الافتراضات الخاصة بوضع السوق وهو تحديد شرط التوازن في السوق بأن تطابق الكميات المعروضة مع الكميات المطلوبة، معنى ذلك أن فائض الطلب مساوي للصفر إلى:

$$X_d - X_s = 0 \qquad (1-13)$$

إذن توازن سوق سلعة معينة يعني تساوي الكميات المعروضة مع الكميات المطلوبة. فإذا كان النموذج الخطي الجزئي لسوق سلعة واحدة:

$$X_d = X_s$$

$$X_d = a_0 - a_1 P \qquad (1-14)$$

$$X_S = -b_0 + b_1 P \qquad (1-15)$$

حيث $a_1 \ , b_1 \geq 0$

من المعادلة (1-14) فإن a_0 و a_1 ثوابت والفرضية تشير إلى أن الكمية المطلوبة من السلعة X دالة خطية متناقصة مع السعر.

أيضا b_0 و b_1 ثوابت من المعادلة (1-15) والفرضية تشير إلى أن الكمية المعروضة من السلعة X دالة خطية متزايدة في السعر بمعنى لن تعرض أي كمية من السلعة إلاّ في حالة زيادة السعر عند مستوى موجب معين.

ولهذا فإن النموذج الخطي لسوق سلعة واحدة يتضمن شرط واحد للتوازن إضافة إلى المعادلتين السلوكيتين اللتين تحدد أن جانبي الطلب والعرض في السوق

$$a_0 - a_1 P = -b_0 + b_1 P$$

$$a_0 + b_0 = a_1 P + b_1 P \qquad (1-16)$$

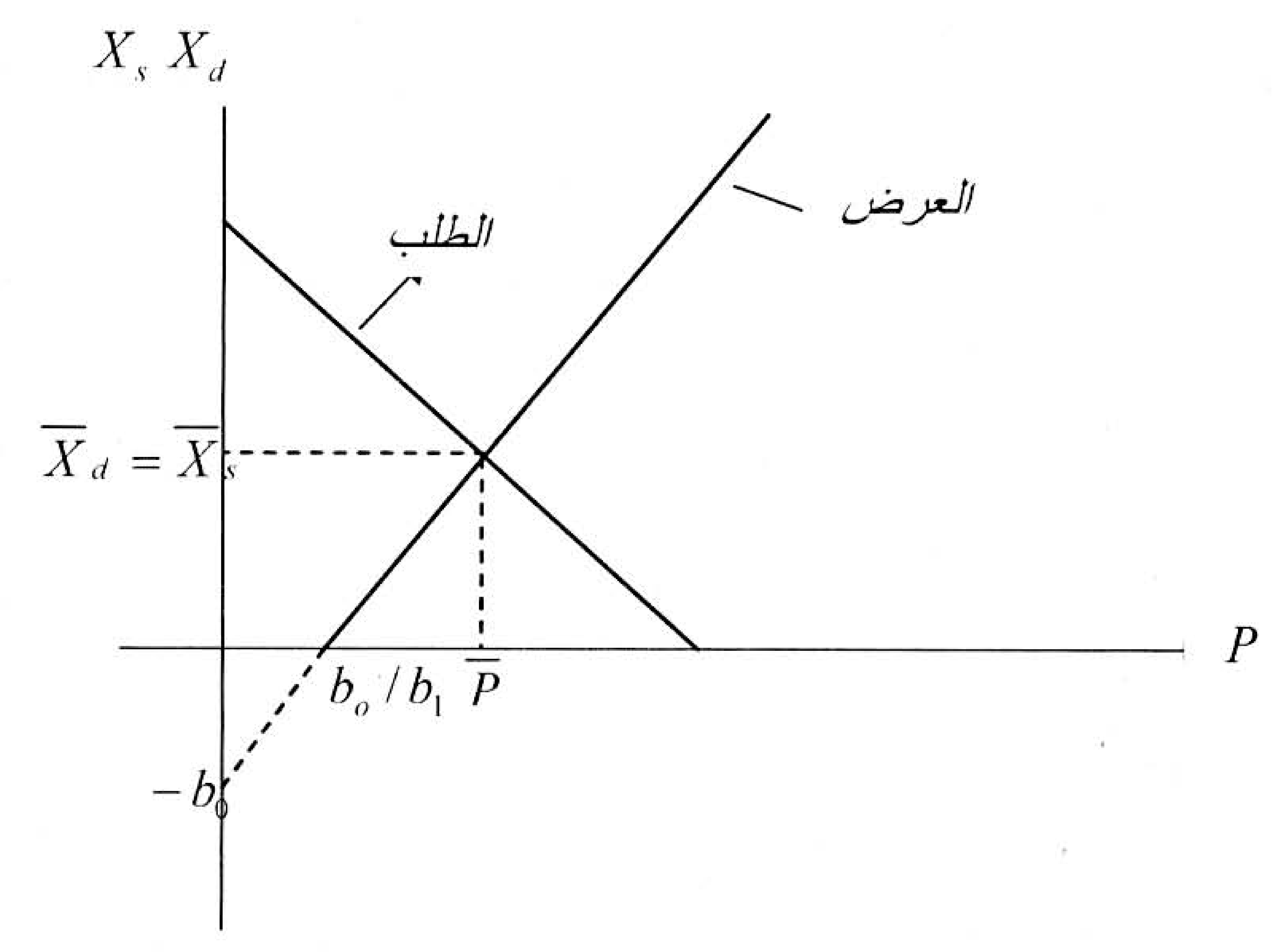
$$a_0 + b_0 = P(a_1 + b_1)$$

إذن قيمة السعر التوازني $\overline{P}$ هو:

$$\overline{P} = \frac{a_0 + b_0}{a_1 + b_1} \qquad (1-17)$$

$$\overline{X}_s = \overline{X}_d = \frac{b_1 a_0 - a_1 b_0}{a_1 + b_1} \qquad (1-18)$$

نلاحظ من المعادلتين (17-1) و(18-1) أن كلا من السعر التوازني والكمية التوازنية قد تم تعبير عنهما بدلالة المعلمات التي يحويها النموذج. وحتى يكون $X > 0$ يجب قبول القيد $a_0 b_1 > a_1 b_0$ وهو الشرط الإضافي لنموذج التوازن الجزئي لسوق بسيط ولسلعة واحدة ويمكن ملاحظة هذا الشرط في البيان:



يوضح الشكل أن السعر والكمية التوازنية يحدثان في نقطة فوق المحور الأفقي وفي الجانب الموجب.

جـ- تأثير الضرائب في توازن سوق سلعة واحدة

للضرائب تأثير كبير في توازن السوق خاصة في ظل المنافسة التامة فبرفعها أو بخفضها يمكن التأثير في أسعار التوازن وكمياتها لسلعة مع السلع. وتفرض على المنتجين نوعين من الضرائب التي تؤثر بشكل

مباشر في جانب العرض وهي ضرائب الإنتاج النوعية وضرائب الإنتاج القيمية.

تؤثر الضريبة النوعية مباشرة في جانب العرض أي أن دالة العرض ستتغير في حين تبقى دالة الطلب على حالها.

فإذا كانت الضريبة المفروضة عند بيع كل وحدة من السلعة هي t وحدة نقدية حيث $t > 0$ يكون السعر الذي يحصل عليه المنتجون بعد فرض ضريبة مقدارها t هو $P_T = P - t$ [يعني أن المنتج يستلم سعر السلعة P ناقصا مقدار الضريبة المفروضة].

دالة العرض:

$$\begin{aligned} X_s &= -b_0 + b_1 P_T \\ &= -b_0 + b_1 [P - t] \\ &= -b_0 + b_1 P - b_1 t \end{aligned} \qquad (1-19)$$

ويكون $P_T < P$ لأن $t > 0$

وبما أن: $X_d = a_0 - a_1 P$

إذن يمكن صياغة النموذج التوازني كالتالي:

$$\begin{aligned} X_d &= a_0 - a_1 P \\ X_s &= -b_0 + b_1 P - b_1 t \\ X_s &= X_d \end{aligned} \qquad (1-20)$$

يتضمن النموذج أربعة متغيرات مجهولة $P,\ X_d,\ X_s,\ P_T$، بالإضافة إلى المقادير الثابتة المعلومة $a_0,\ a_1,\ ,b_0,\ b_1,\ t$

لحل النموذج رياضيا:

$$a_0 - a_1 b = -b_0 + b_1 P - b_1 t$$
$$a_0 + b_0 + b_1 t = b_1 P + a_1 P$$
$$a_0 + b_0 + b_1 t = P\left[b_1 + a_1\right]$$

$$\overline{P} = \frac{a_0 + b_0 + b_1 t}{b_1 + a_1} \qquad (1-21)$$

نعوض عن قيمة $\overline{P}$ في دالة الطلب أو العرض نحصل على الكمية التوازنية

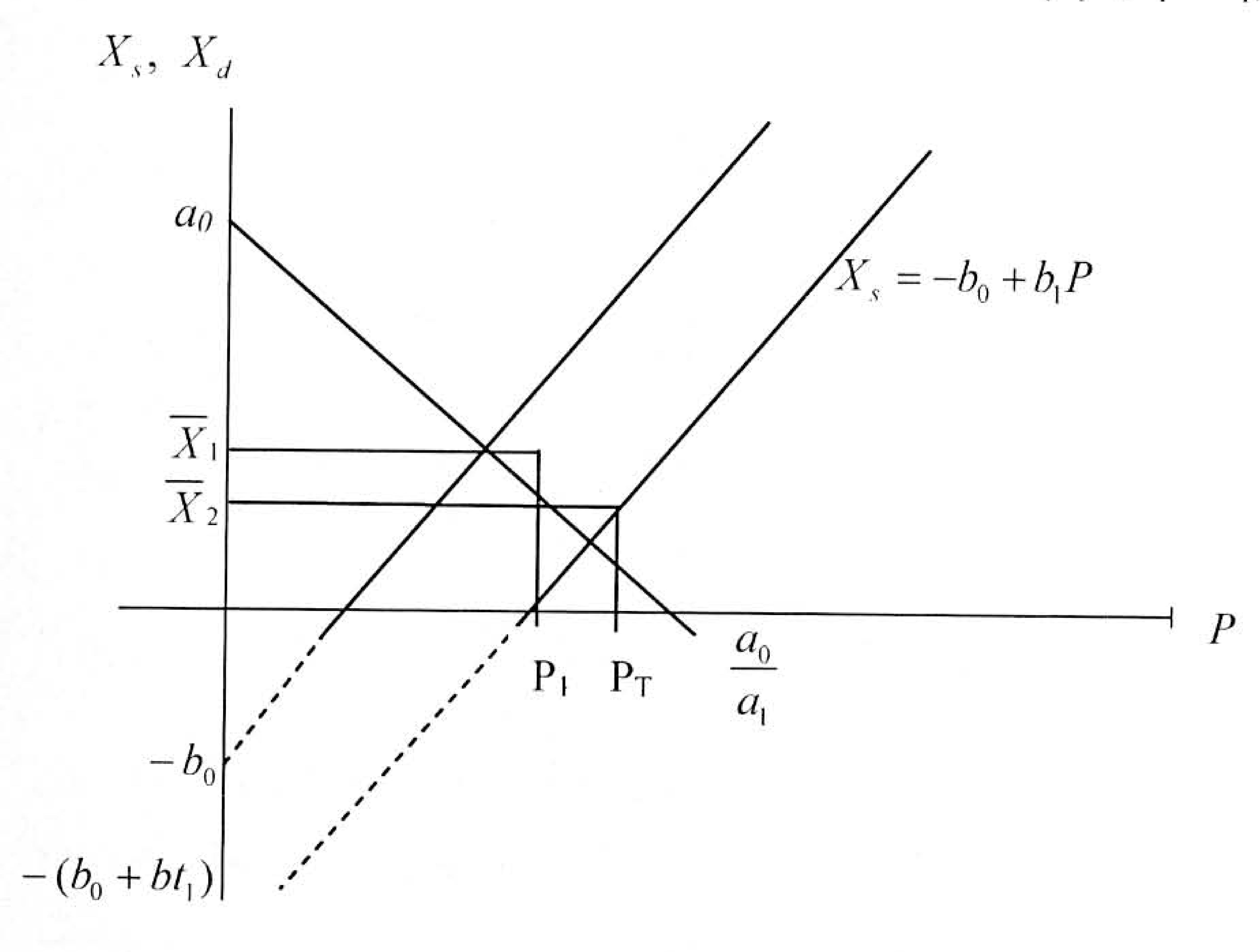
$$\overline{X}_s = \overline{X}_d = a_0 - a_1 \overline{P}$$
$$= a_0 - a_1\left[\frac{a_0 + b_0 + b_1 t}{b_1 + a_1}\right]$$
$$= \frac{a_0(b_1 + a_1) - a_1(a_0 + b_0 + b_1 t)}{b_1 + a_1}$$
$$= \frac{a_0 b_1 - a_1 b_0 - a_1 b_1 t}{b_1 + a_1}$$
$$= \frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{b_1 + a_1} - \frac{a_1\ b_1 t}{b_1 + a_1} \qquad (1-22)$$

إذا أعطينا لمعدل الضريبة t القيمة صفر فإننا نحصل على السعر نفسه والكمية ويمكن تحديد الفرق بين القيم التوازنية قبل فرض الضريبة وبعده بالحدين:

في حالة السعر التوازني يكون الفرق محدد بـ $\frac{b_1}{a_1+b_1}t$ وفي حالة الكمية التوازنية يكون الفرق محدد بـ $\frac{-b_1 a_1}{a_1+b_1}t$.

وتكـــون الزيـــادة في السعر الناجمة عن فرض الضـــريبة مساويا المقدار $[b_1/(a_1+b_1)]$ مثلا من أمثال مقدار الضريبة t المفروضة على الوحدة المباعة.

وبما أن $0<[b_1/(a_1+b_1)]$ فإن تأثير الضريبة النوعية في سعر التوازن يكون موجبا دوما، ويكون آثر الضريبة في الكمية التوازنية أثارا سلبيا لأن $0<[(a_1b_1)/(a_1+b_1)]-$، وبالتالي تنقص كمية التوازن بمقدار $a_1b_1/(a_1+b_1)$.



يتضح من الشكل أن دالة الطلب X_d بقيت على حالها دون تغيير، في حين أن منحنى دالة العرض قد انتقل نحو اليسار، وانتقلت القيم التوازنية من $(\overline{X}_1, \overline{P}_0)$ إلى $(\overline{X}_2, \overline{P}_T)$ بعد فرض الضريبة النوعية.

نلاحظ أن منحنى العرض قبل فرض الضريبة وبعدها متوازيان لأن لهما نفس الميل b_1، ويختلفان من حيث العدد الثابت الذي يمثل تقاطع منحنى دالة العرض مع المحور العمودي، يساوي $-b_0$ في دالة العرض قبل فرض ضريبة، $-(b_0 + b_1 t)$ في دالة العرض بعد فرض الضريبة.

أما النوع الثاني من الضريبة والذي يتمثل في ضريبة الإنتاج القيمية والتي تمثل نسبة مئوية من سعر السلعة P نفرض تساوي $t\%$ من سعر السلعة ويكون السعر الذي يحصل عليه المنتجون بعد فرض الضريبة P_T:

$$P_T = P - tP = P(1-t) \qquad (1-23)$$

حيث P_T السعر بعد فرض الضريبة و P سعر قبل فرض الضريبة.

عند فرض الضريبة على الإنتاج يتغير بشكل مباشر العرض، وتصبح دالة العرض بعد فرض الضريبة:

$$X_s = -b_0 + b_1 P_T$$
$$= -b_0 + b_1 P(1-t)$$

$$= -b_0 + b_1 P - b_1 Pt \qquad (1-24)$$
$$X_d = a_0 - a_1 P$$

شرط التوازن: $X_d = X_s$

$$a_0 - a_1P = -b_0 + b_1P - b_1Pt$$

$$a_0 + b_0 = b_1P + a_1P - b_1Pt$$

$$a_0 + b_0 = P[b_1 - b_1t + a_1]$$

$$\overline{P} = \frac{a_0 + b_0}{b_1 - b_1t + a_1} \qquad (1-25)$$

$$\overline{X}_d = a_0 - a_1\left[\frac{a_0 + b_0}{b_1 + a_1 - b_1t}\right]$$

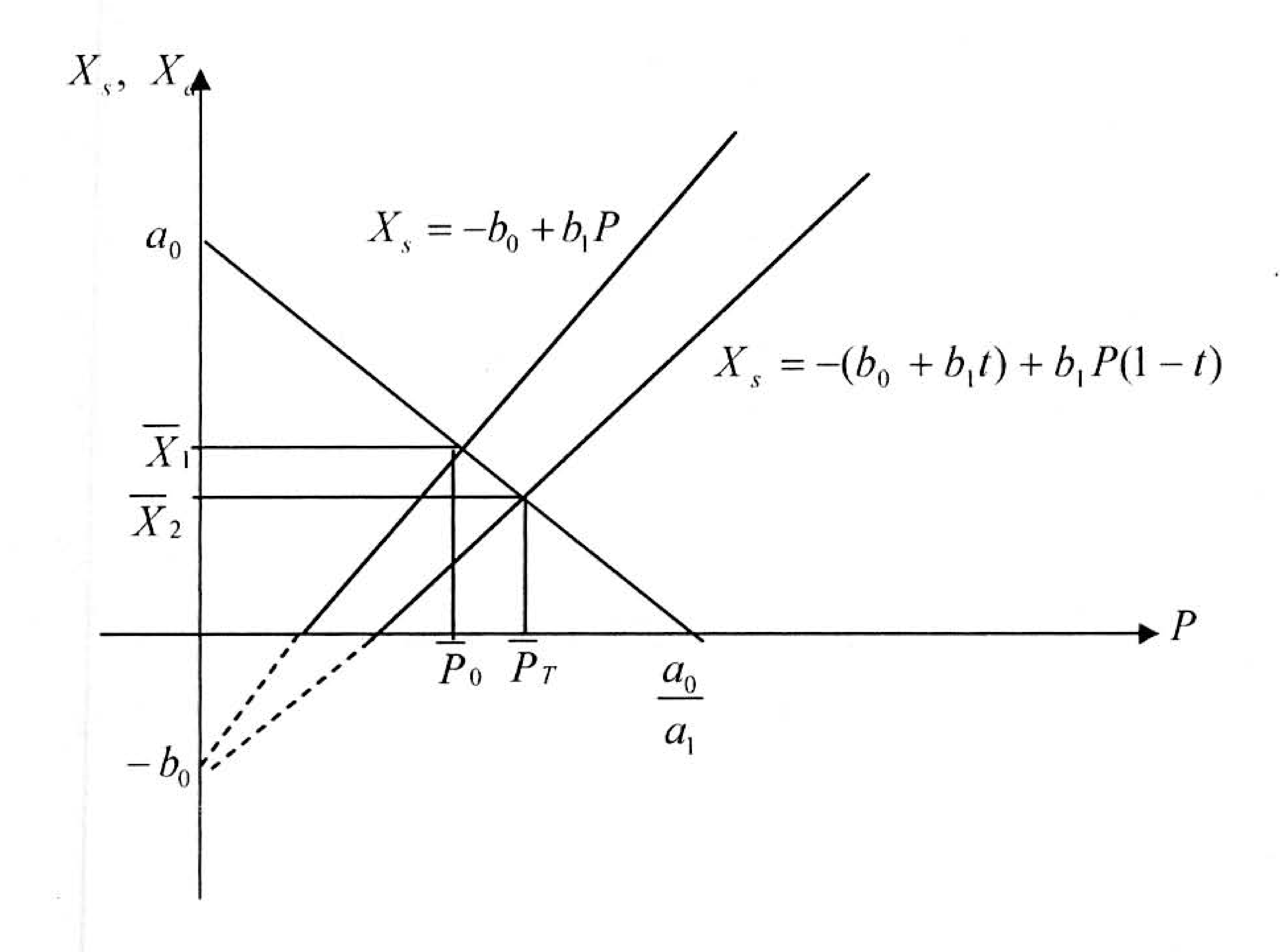
$$= \frac{a_0(b_1 + a_1 - b_1\,t) - a_1(a_0 + b_0)}{b_1 + a_1 - b_1\,t}$$

$$\overline{X}_d = \frac{a_0b_1 - a_1b_0 - a_0b_1t}{a_1 + b_1 - b_1t}$$

$$= \frac{a_0b_1 - a_1b_0}{a_1 + b_1 - b_1t} - \frac{a_0b_1t}{a_1 + b_1 - b_1t}$$

$$= \frac{a_0b_1 - a_1b_0}{a_1 + b_1(1-t)} - \frac{a_0b_1t}{a_1 + b_1(1-t)} \qquad (1-26)$$

نلاحظ أن السعر التوازني يرتفع مع ازدياد معدل الضريبة.



نلاحظ أن منحني العرض غير متوازيين لأنهما يختلفان في الميل قبل فرض الضريبة الميل يساوي (b_1) وبعد فرض الضريبة الميل يساوي $b_1(1+t)$، ويقطعان معا المحور العمودي في النقطة $(-b_0)$.

تمارين الفصل الأول

التمرين 1-1

أوجد $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ للدالة $y = log\, x$

التمرين 1-2

عين القيم القصوى إن وجدت للدالة التالية: $y = x\,\ell^{-x/2}$

التمرين 1-3

أحسب المشتقات للدوال التالية:

1) $y = e^{1/x}\sqrt{x(x+2)}$

2) $y = \sqrt{x - \sqrt{x^{2} - 1}}$

3) $y = e^{-3x}\, Log\,(4x-1)$

4) $y = log\left(\frac{2x+1}{\sqrt{x}}\right)$

5) $y = x^{\log x}$

6) $y = x^{x}$

7) $y = \frac{x^{n}}{(1+x)^{n}}$

8) $y = \frac{x\sqrt{x-1}}{(x-2)^{3}}$

9) $y = \log \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1}$

10) $y = \log \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{\sqrt{1+x^2} + 1}$

11) $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

12) $y = a^x x^a$

13) $y = x^{e^x}$

14) $y = e^{2x-x^2}$

15) $y = e^{x \log x}$

16) $y = \sqrt{1 - e^{-x2}}$

17) $y = \frac{1}{\sqrt[k]{\left(x^2 + x + 1\right)^3}}$

18) $y = e^{\frac{x-1}{x2}}$

التمرين 4-1

حدد كمية الإنتاج التي تحقق توازن المؤسسة إذا علمت أن الإيراد الكلي

$$Rt = 45x - 0.5x^2$$

وأن التكاليف الكلية: $Ct = x^3 - 39.5x^2 + 120x + 125$

التمرين 5-1

إذا كانت مؤسسة ما تتميز بدالة الإيراد و التكلفة التاليتين:

$RT(y) = 12y$

$CT(y) = 2y^3 - 15y^2 + 36y + 16$

المطلوب:

1-أوجد التكلفة الحدية والإيراد الحدي عندما تكون $y = 4$ وفسر مدلول النتيجة

2-حدد مستوى الإنتاج الذي يحقق أقصى ربح وأحسب قيمته

3-هل تنصح المؤسسة بإنتاج ذلك المستوى الذي يعظم ربحها ولماذا ؟

التمرين 6-1

إذا كانت دالة الطلب على إنتاج إحدى المؤسسات محددة بالعلاقة التالية:

$$y = 90 - 2x$$

ودالة التكاليف المتوسطة لهذه المؤسسة هي:

$$cm = y^2 - 39{,}5y + 120 + \frac{125}{y}$$

المطلوب:

حدد حجم الإنتاج الذي يحقق النهاية العظمى للإيراد الكلي والأرباح ويحقق النهاية الصغرى للتكاليف الحدية

الفصل الثاني

الاشتقاق - التفاضل- القيم القصوى

لدالة ذات أكثر من متغير واحد حقيقي

2-1- الإشتقاق الجزئي لدالة ذات متغيرين حقيقيين

2-2- القيم القصوى لدالة ذات متغيرين حقيقيين $Z = f(x, y)$

2-3- القيم القصوى لدالة ذات ثلاث متغيرات مطلقة

2-4- القيم القصوى لدالة ذات قيود على قيم التغيرات المستقلة

2-5- التفاضل الكلي

2-6- المشتقة الكلية

2-7- تطبيق اقتصادي

التمارين



1-2 الاشتقاق الجزئي لدالة ذات متغيرين حقيقيين

لنفرض أن الدالة المحددة بالعلاقة $z = f(x,y)$ معرفة على الفضاء D في الفراغ IR_2 وإن (x , y) متغيرين مستقلين.لنثبت قيمة y ونترك x يتغير وفق ما يشاء شريطة انتمائه دوما إلى الفضاء D في هذه الحالة تصبح الدالة $f(x,y)$ تابعة للمتغير x فقط. لنفرض أن Δx تزايدا ما طرأ على قيمة x فإن انتهت النسبة إلى:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x+\Delta x, y) - f(x,y)]}{\Delta x}$$

إلى نهاية معينة من أجل جميع قيم x التي تنتمي إلـــى المجـــال معـــين محتوى في الفضاء D نقول عن هذه النهاية أنها المشتق الجزئـــي مـــن المرتبة الأولى بالنسبة لـــ x للدالة z ونرمز لهذه النهاية بـــ:

$$f'_x(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x, y+\Delta y) - f(x,y)]}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x}$$

وبنفس الطريقة يتم حساب المشتق الجزئي الأولي بالنسبة لـــ y

$$f'_y(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{[f(x, y+\Delta y) - f(x,y)]}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y}$$

2-1-1- المشتقات الجزئية من المرتبة الأعلى

إذا كانت $z = f(x,y)$ دالة لمتغيرين x و y ولها مشتقين جزئيين أوليين z'_x ، z'_y هذين المشتقين دالتين بدورهما للمتغيرين x و y فإذا كانا مستمران وقابلان للاشتقاق بالنسبة لكل من المتغيرين x و y فلكل منهما مشتقين أيضا نسميها المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية للدالة z وتكتب بالصيغة التالية:

المشتق الجزئي الثاني بالنسبة لــ x

$$z''_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

المشتق الجزئي الثاني بالنسبة لــ y

$$z''_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

2-1-2- المشتقات المتقاطعة

_ تستخرج المشتقات المتقاطعة من المشتقات الجزئية الأولى بالنسبة لـ x أو بالنسبة لـ y.

$$z''_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \, \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

$$z''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

2-2-القيم القصوى لدالة ذات متغيرين حقيقيين $z = f(x,y)$

إذا كانت نوعية القيم القصوى لدالة ذات متغير واحد $y=f(x)$، تتجسد في رسم بياني ذا بعدين فإن نوعية القيم القصوى لدالة ذات متغيرين

$z=f(x,y)$ يمكن أن تتجسد في فضاء يحتوي على ثلاث أبعــاد وهــذا يشكل مساحة تسمح بتبيان نوعية هذه القيم. إلاّ أن هذه النوعية مرتبطــة بإشارات المشتقات الجزئية الثانية والمشتقات المتقاطعة لكل من x و y.

وبالتالي فإذا كانت الدالة $z = f(x,y)$ قابلة للاشتقاق في $[a \quad b]$، تحــدد قيمها القصوى بإتباع الخطوات التالية:

1. **الشرط اللازم:** هو البحث عن القيم المستقرة للدالة z

- نجد التفاضل الكلي للدالة $z = f(x,y)$

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \qquad (2-1)$$

لكن dx و dy يمثلان تغيرات كيفية لــ y و x و ليس من الــضروري أن ينعدمان في آن واحد إذن الشرط أن يكون $dz = 0$ بمعنى:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \qquad (2\text{-}2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad (2\text{-}3)$$

وعند حل جملة المعادلتين (2-2) و(2-3) نجد القيم المستقرة(القيم المتطرفة)

2. **الشــرط الكــافي:** تعيين نوعية القيــم الاستــقرارية وهذا بإيجاد التفاضل الثاني للدالة z.

$$d^2 z = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dx\, dy \qquad (2-4)$$

ينتج عن العلاقة الأخيرة أربع حالات هي:

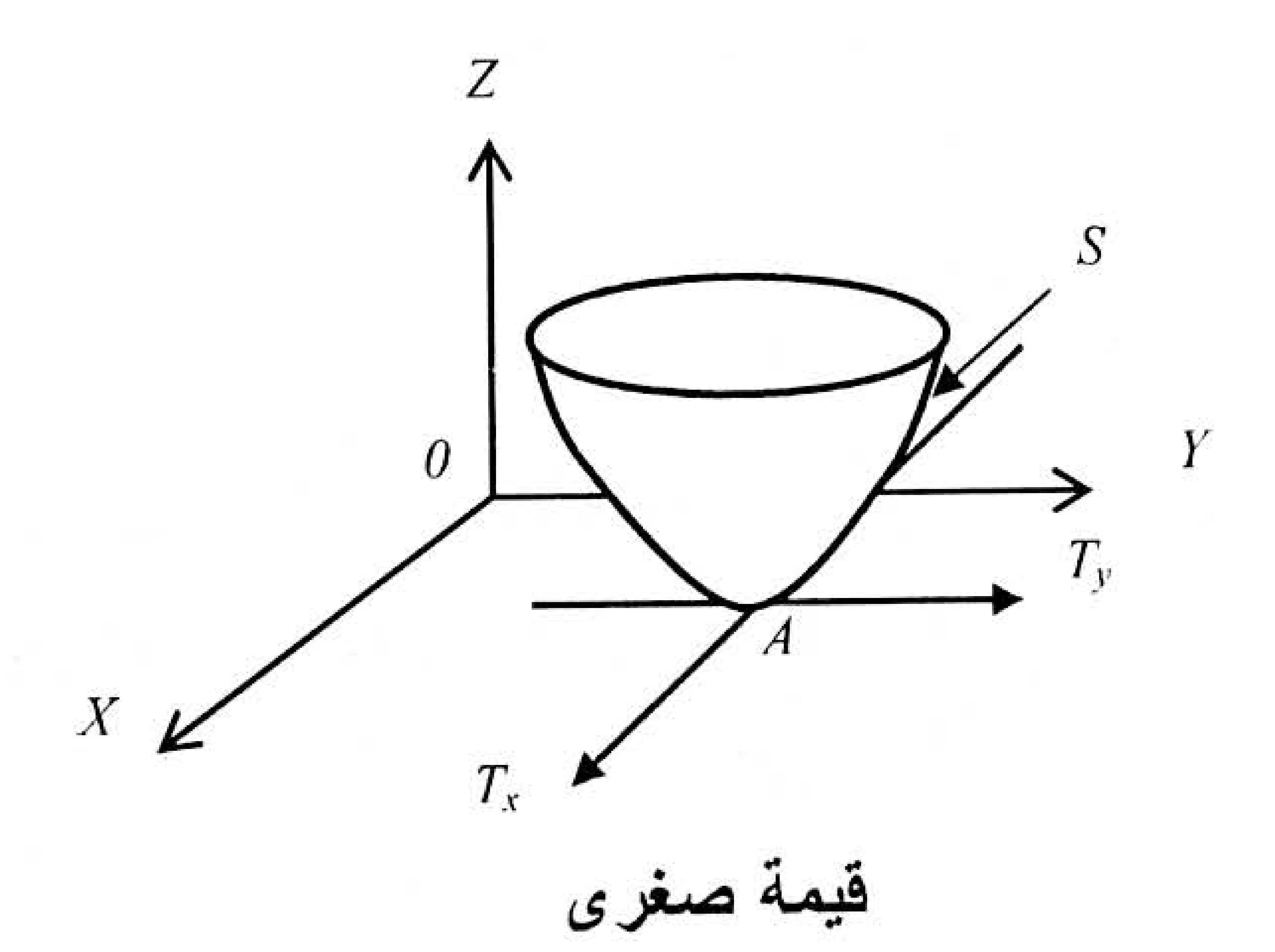
الحالة الأولى: إذا كان

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \rangle \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2$$

بحيث

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \rangle 0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \rangle 0$$

فإننا أمام قيمة صغرى وهذا ما يوضحه الرسم البياني التالي.



قيمة صغرى

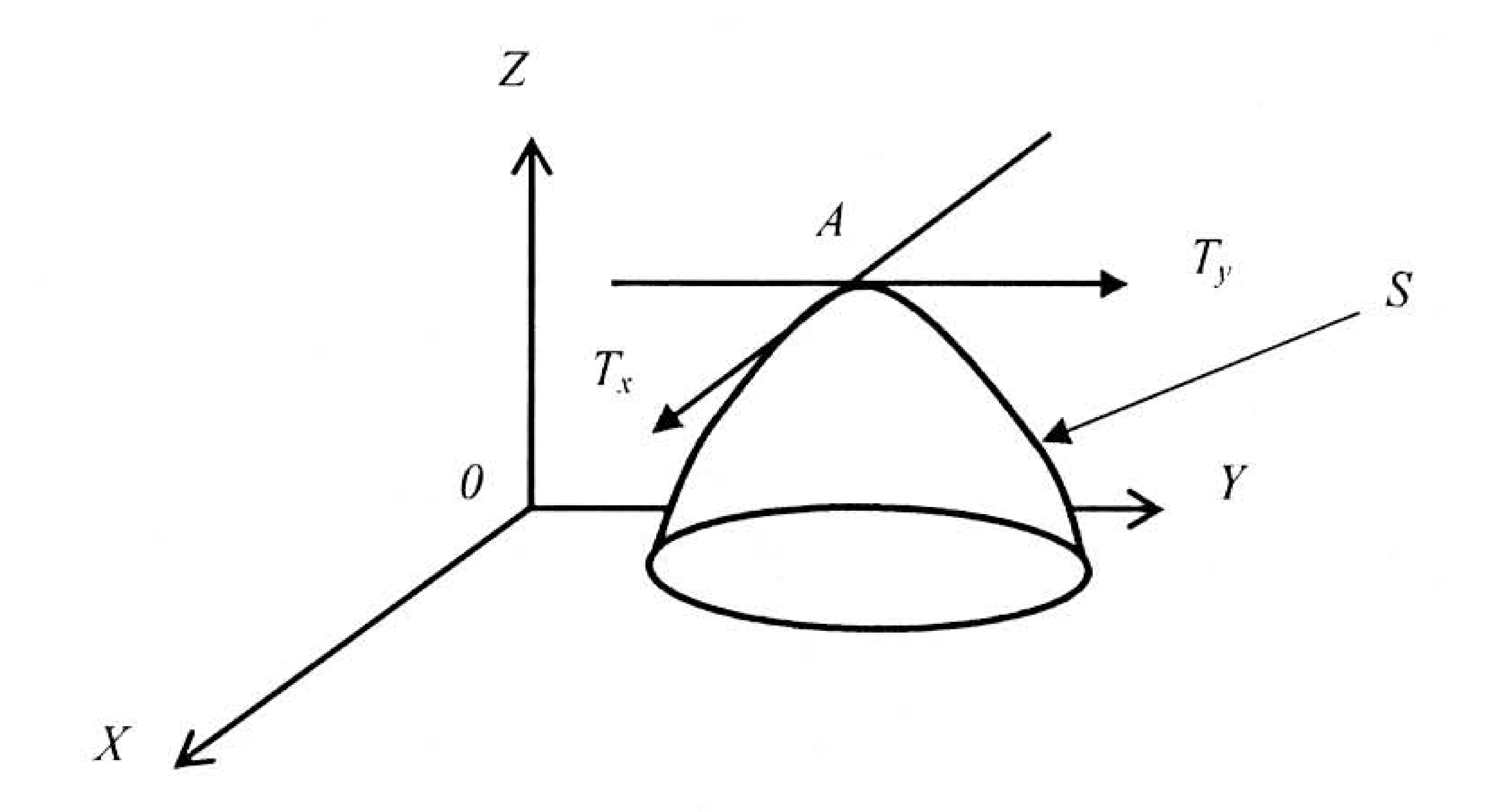
الحالة الثانية: إذا كان

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \rangle \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2$$

بحيث:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \langle 0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \langle 0$$

فإننا أمام قيمة عظمى وهو مبين في الرسم البياني أدناه



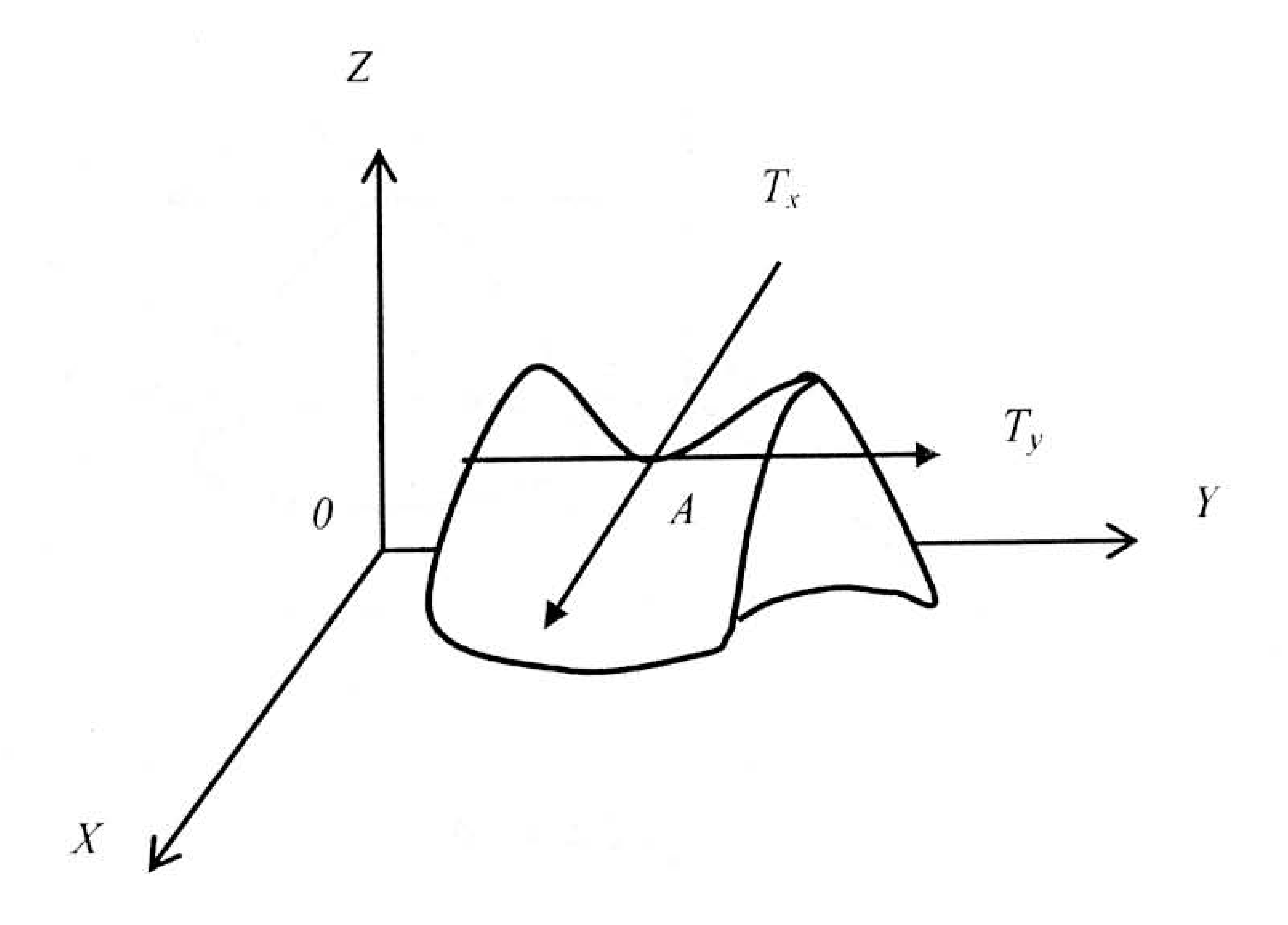
قيمة عظمى

نــلاحظ أن النقطة A فـــي المنحنيين للقيمتين الصغرى والعظمى أعلاه توضح المستوى المماس للدالة $z = f(x,y)$ والذي يكون موازي للمستوي $o\,x\,y$، وهذا ما يفسر تحقيق الشرط اللازم أي الميلين مساويين للصفر.

الحالة الثالثة: إذا كان $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} < \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2$$

بحيث: $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} < 0$$

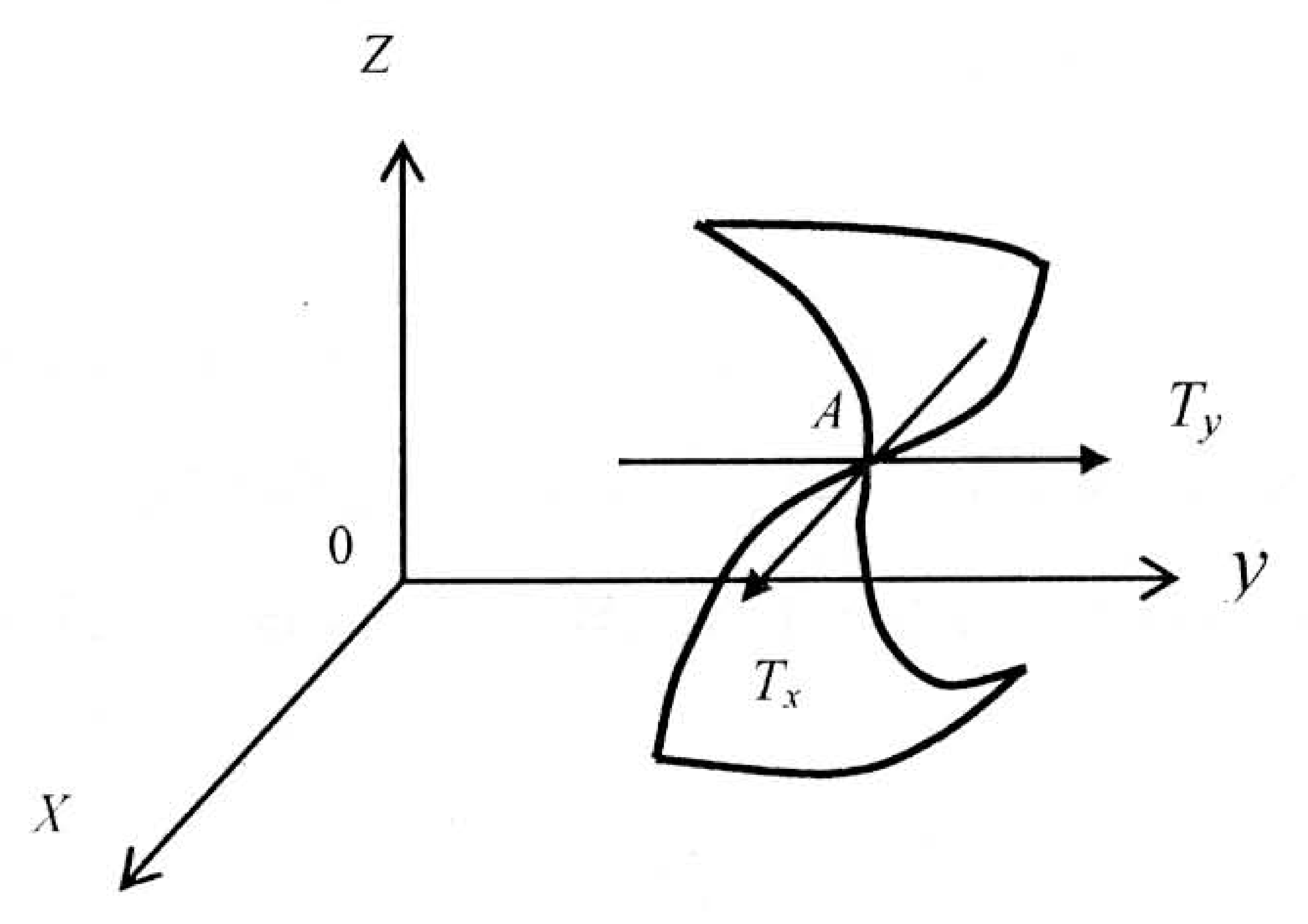
فإنه لا توجد للدالة قيمة عظمى أو قيمة صغرى وإنما توجد مـــا يـــسمى بالنقطة السرجية والرسم البياني أدناه يوضح



نلاحظ أن النقطة A التي تحدد النقطة السرجية فإنها تمثل عظمى بالنسبة للسطح $x\,z$ وصغرى بالنسبة للسطح $y\,z$ وهذا بتحقيق الشرط اللازم.

الحالة الرابعة: إذا كان
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \times \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} \right)^2$$

هذه الحالة تبين فشل الاختبار في التحقق من نوعية القيمة الحرجـــة ممـــا يستلزم دراسة قيم الدالة بالقرب من النقطة الحرجة.



نلاحظ بالرغم من تحقق الشرط اللازم فإن الشرط الكافي لم يتحقق وهذا يدل على أن الشرط الأول غير كاف ولا بدا من البحث عن شروط أخرى إلا أننا سنكتفي بهذا التحليل لما له من أهمية في الاقتصاد.

مثـال1

أوجد القيم القصوى للدالة $z = f(x,y) = x + 2\ e\ y - e^{x} - e^{2y}$

الحل

1. الشرط اللازم: البحث عن القيم المستقرة (القيم المتطرفة)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 - e^{x} = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2e - 2e^{2y} = 0 \qquad (2)$$

بحل جملة المعادلتين نحصل على

$$x = 0 \qquad\qquad y = 1/2$$

إذن القيم الحرجة هي $(0\ ,\ 1/2)$ ماذا تحقق هذه القيم ؟

2. الشرط الكافي: تحديد نوعية القيم المستقرة عن طريق المشتقات الجزئية الثانية لكل من (x و y) و المشتقة المتقاطعة

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -e^x = -1 \langle 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4e^{2y} = -4\ e \langle 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\ \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\ \partial x} = 0$$

إذن:

$$(-1)\,(-4e) > 0$$

وبالتالي فإنه توجد قيمة عظمى عند $(0\ ,1/2)$ و قيمتها هي $z = 1$.

-2-3- القيم القصوى لدالة ذات ثلاث متغيرات مطلقة $u = f(x, y, z)$

لتكن الدالة بثلاث متغيرات القرار ($u = f(x, y, z$ لإيجاد القيم القصوى لهذه الدالة نتبع الخطوات التالية:

1. **الشرط اللازم:** هو جعل $du = 0$

وبما أن
$$du = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

و dx, dy, dz تغيرات كيفية لا متناهية في الصغر للمتغيرات المستقلة $z, y\, x$ فليس من الضروري أن تكون معدومة إذ يكفي لتحقق $du = 0$ أن يكون:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \qquad (2-5)$$

بتحقيق الشرط الأول يدل على وجود بعض قيم u كقيم مستقرة (قيم متطرفة) لدالة الهدف.

2. **الشرط الكافي:** تعيين نوعية هذه القيم المستقرة و هذا بإيجاد:

- المشتقات الجزئية الثانية .

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\ ,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\ ,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

- المشتقات المتقاطعة

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}\ ,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\ ,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}\ ,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y}\ ,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x}$$

ومن ثم يمكن تركيب المحدد الهيسي بالشكل التالي:

$$|H| = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \, \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \, \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \, \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \, \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{vmatrix} \quad (2\text{-}6)$$

وعن طريق إشارة محدداته الرئيسية يتم تحديد القيمة القصوى حيث ينتج أربع حالات هي:

الحالة الأولى:

إذا كان:

$$|H_1| = \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right| > 0$$

$$|H_2| = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \, \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} > 0$$

$$|H_3| = |H| \rangle 0$$

يدل على أن المصفوفة الهيسية أكيدة الإيجابية و بالتالي نقاط الاستقرار تحقق ما يسمى بالقيمة الصغرى.

- الحالة الثانية: إذا كان $|H_1| < 0$ ، $|H_2| > 0$ ، $|H_3| < 0$ يدل على ان المصفوفة الهيسية أكيدة السالبية وبالتالي نقاط الاستقرار تحقق ما يسمى بالقيمة العظمى وهذا عندما يكون الشرط اللازم للعلاقة (5-2) محققا.

الحالة الثالثة: إذا كانت المصفوفة الهيسية غير أكيدة السالبية أو الإيجابية فإن نقاط المستقرة تكون نقاط سرجية.

الحالة الرابعة: إذا كانت قيمة المحدد الهيسي في مجموعه يساوي صفر تكون النقاط معبرة عن انعكاس.

نلاحظ من الحالتين الأخيرتين أنه لابد من البحث عن شروط أخرى لأن الشرط الأول غير كافي في التحليل الرياضي إلاّ أن القيمة العظمى والقيمة الصغرى تأخذ الشكل الكبير في التحليل الاقتصادي.

2-4- القيم القصوى للدالة ذات قيود على قيم المتغيرات المستقلة

نحتاج أحيانا إلى تحديد نهايات دالة معينة على أساس قيود على العلاقة بين المتغيرات المستقلة التي تتضمنها هذه الدالة وقد تصاغ هذه القيود بشكل متساويات أو متراجحات.

فإذا أخذنا مثال اقتصادي فالمستهلك قد يرغب في تعظيم منفعته التي يستمدها من استهلاك السلع بحيث لا يتعدى إجمالي ما ينفقه على هذه السلع مما يمتلكه من دخل نقدي **[أي تعظيم منفعته وفقا لقيد الدخل]**. وقد

يرغب المنتج في تقليل التكلفة الكلية للسلع التي ينتجها بشرط أن لا يقل إنتاجه من هذه السلع عن حجم معين.

ونتيجة لذلك يتم تركيب دالة جديدة التي تتضمن دالة موضوع البحث وتسمى دالة الهدف مضافا إليها القيد في صورة صفرية حتى يحفظ على تعادل طرفي الدالة دون تأثير مع ضرب القيد في قيمة معينة غير محددة تسمى بمعامل لاقرانج ويرمز له بالرمز "λ".

وبذلك تعتبر طريقة لاقرانج من أكثر الطرق شيوعا واستخداما للحصول على القيم العظمى والصغرى لدوال وفقا لقيود بصيغة متساويات.

- طريقة لاقرانج:

لتكن الدالة $z = f(x, y)$، والتي تسمى دالة الهدف الذي نرغب في تعظيمها أو تقليلها وفق قيد $c = g(x, y)$ حيث c ثابت ما.

بإستخدام طريقة مضاعف لاقرانج نتبع الخطوات التالية:

1-نركب دالة تسمى دالة لاقرانج وهي:

$$\begin{aligned} L(x, y, \lambda) &= f(x, y) + \lambda\left[c - g(x, y)\right] \\ &= f(x, y) - \lambda\left[g(x, y) - c\right] \qquad (2-7) \end{aligned}$$

2- من أجل الحصول على القيم القصوى للعلاقة (7-2) نتبع ما يلي:

أ- الشرط اللازم، البحث عن القيم المستقرة بإيجاد المشتقات الجزئية الأولى.

$$\frac{\partial L}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}-\lambda\frac{\partial g}{\partial x}=0 \qquad (2-8)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}-\lambda\frac{\partial g}{\partial y}=0 \qquad (2-9)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=c-g(x,\ y)=0 \qquad (2-10)$$

وبحل جملة هذه المعادلات نحصل على القيم المستقرة(القيم المتطرفة)

ب- الشرط الكافي: تحديد نوعية هذه القيم بإيجاد المشتقات الجزئية الثانية والمشتقات المتقاطعة وتركيب المحدد الهيسي المحدد $|\bar{H}|$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & -\frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & -\frac{\partial g}{\partial y} \\ -\frac{\partial g}{\partial x} & -\frac{\partial g}{\partial y} & 0 \end{vmatrix} = |\bar{H}| = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

وحسب قيمة $|\bar{H}|$ تتحدد نوعية القيم.

فإذا كانت $0 < |\bar{H}|$ فإن القيم المستقرة تحقق قيمة عظمى.

وإذا كانت $0 > |\bar{H}|$ فإن القيم المستقرة تحقق قيمة صغرى.

ملاحظة

1- يعبر $\left|\bar{H}\right|$ عن المحدد الهيسي المحدود *Hessien Borné*؛

2- يمكن استخدام طريقة التعويض في إيجاد القيم القصوى الخاضعة للقيد؛

3- " λ " كمعامل لاقرانج فإن قيمتها تمثل تأثير دالة القيد على الدالة الأصلية.

-2-5- التفاضل الكلي

يتضح مفهوم التفاضل الكلي بشكل واضح في دالة ذات عدة متغيرات فإذا كانت الدالة:

$$z = f(x_1, x_2, x_3, \dots x_i) \qquad (2\text{-}11)$$

حيث x_i تمثل المتغيرات الخارجية.

إذا افترضنا أن هذه الدالة مستمرة وقابلة للاشتقاق عند كل نقطة فإنه بإمكاننا معرفة تأثير في ظل التغيرات الصغيرة جدا لـ $x_i = (i = 1, 2\dots n)$ على التغير التابع لـ z.

فإذا افترضنا أن x_i تتغير أما باقي المتغيرات تبقى ثابتة عند ئـدا يمثل المشتق الجزئي الأول $\frac{\partial z}{\partial x_1}$ التغير لـ z بالنسبة للتغير الصغير جدا لـ x_1 وهذا يدل على أن التغير في z مرتبط بالتغير في x_1 والذي يمكن صياغته بالشكل التالي: $\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)dx_1$.

يمكن تطبيق هذا التحليل على كل المتغيرات الباقية. إذن التغير الكلي لـــ z الناتج عن التغيرات الصغيرة جدا لكل المتغيرات x_i يمكن كتابته على الشكل التالي:

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)dx_1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\right)dx_2 + ... + \left(\frac{\partial z}{\partial x_n}\right)dx_n \qquad (2-12)$$

الشكل dz والذي يعني التغير الكلي لـــ z أو مجموع التغيرات الناتجة عن التغيرات لكل x_i يسمى بالتفاضل الكلي الأولي.

ملاحظة

في حالة تغير x_1 فقط وباقي المتغيرات ثابتة فإن التفاضل الكلي الأولـــي يتحول إلى التفاضل الجزئي الأولي $dz = \frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1$.

مثال: أوجد التفاضل الكلي الأولي للدالة التالية:

$$y = f(x,z) = 4x^3 + 5z^2$$

نكتب عبارة التفاضل الكلي للدالة y

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x}dx + \frac{\partial y}{\partial z}dz$$

$$= 12\,x\,dx + 10\,z\,dz$$

2-6- المشتقة الكلية

إذا كان تغير z ناتج عن تغير y لما هذا التغير يؤثر على المتغير (x) والذي يظهر عند تحديد y فيمكن حساب هذا التأثير بإدخال عبـــارة المشتقة الكلية.

إذا اعتبارنا الدالة $z = f(x, y)$، بشرط أن المتغير x هو في حد ذاته دالة في المتغير y أي:

$$z = f(x, y)$$
$$x = g(y) \qquad (2\text{-}13)$$

في حالة y تتغير بـ dy فإن تأثيرها على z يمكن أن يلاحظ من خـــلال الشكل التالي:

$$y \xrightarrow{\;g\;} x \xrightarrow{\;f\;} z$$

(y يؤثر على z مباشرة عبر f)

نلاحظ أن y يؤثر بشكل مباشر على z من خلال الدالة f ويؤثر بـــشكل غير مباشر من خلال x بواسطة الدالة g وكنتيجة فإن المشتق الجزئي لـــ $z'_y = \frac{\partial z}{\partial y}$ يقيس الأثر المباشر لتغير y على z بدون إشارة إلى الأثـــر غير المباشر.

إذن تعتبر المشتقة الكلية ضرورية لكي تبين التأثير الكلي لتغير y علـــى المتغير التابع z وباستخدام التفاضل نجد:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \qquad (2-14)$$

وبقسمة العلاقة (2-14)على dy نجد:

$$\frac{dz}{dy} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dy} + \frac{\partial z}{\partial y} \qquad (2-15)$$

من العلاقة (2-15) يمكن أن نستنتج ما يلي:

- العبارة $\frac{\partial z}{\partial y}$ تقيس التأثير المباشر للتغير y على z.

- العبارة $\frac{\partial z}{\partial y} \frac{dx}{dy}$ تقيس التأثير غير المباشر بمعنى تقيس تأثير التغيـر لـ y على z عن طريق x، وعليه فالتغير لـ y يتأثر بـ x الذي يتغير بـ dx ومن ثم ينتج عنه التأثير بالنسبة لـ z.

إذن المعادلة (2-15) توضح معدل التغير الكلي لـ z لما y تتغير وفـي نفس الوقت توضح المشتقة الكلية لـ z بالنسبة لـ y.

مثال: أوجد المشتقة الكلية $\frac{dz}{dy}$ للدالة التالية:

$$z = 6x^2 + 15xy + 3y^2$$

علما أن $x = 7y$

نضع عبارة التفاضل الكلي الأولي لـ:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

$$= (12x + 15y)\, dx + (15x + 6y)\, dy$$

المشتقة الكلية تأخذ الشكل التالي:

$$\frac{dz}{dy} = (12x + 15y)\frac{dx}{dy} + (15x + 6y)\frac{dy}{dy}$$

$$= (12\,x + 15\,y)\ 7 + (15\,x + 6\,y)$$

تعويض عن $x = 7$ نجد:

$$= 12\,(7) + 15\,y + (15\,(7) + 6\,y$$

$$dy = 804\,y$$

ملاحظة:

تكمن أهمية المشتقة الكلية في معرفة الأثر المباشر والغير مباشر التـــي تحدثه التغيرات الخارجية على التغير التابع موضوع الدراسة.

2-7 - تطبيق اقتصادي

2-7-1- دوال الإنتاج

نفترض أن لدينا عملية إنتاج بسيطة بحيث أن صاحب المؤسسة يستخدم مدخلين متغيرين X_1 و X_2 بالإضافة إلى مدخل واحد ثابت لإنتاج منتج واحد هو Q، فدالة الإنتاج في هذه الحالة تنص على أن كمية المنتج Q تكون بدلالة كميات المدخلات المتغيرة x_1 و x_2.

$$Q = f(x_1, x_2) \qquad (2-16)$$

ويفترض أن هذه الدالة تكون معرفة إلاّ بقيم غير سالبة للمدخلات والمخرجات لأن القيم السالبة لا تعطي معنى ومجال دالة الإنتاج قد

يحتوي مجال الدالة على جميع القيم غير السالبة في الربع الرابع من المحاور وقد يختلف من حالة لحالة أخرى.

ويفترض أن دالة الإنتاج تكون دائما متزايدة بمعنى $0 < f_i$ ضمن مجال الدالة. وأيضا يفترض فيها أن تكون دالة شبه مقعرة عند ما يعمل صاحب المؤسسة على الحصول على الحد الأدنى للتكلفة، وتكون مقعرة عندما يعمل صاحب المؤسسة على الحصول على الحد الأعلى للربح.

وقد يتمكن صاحب المؤسسة من استخدام مجموعات عديدة مختلفة من X_1 و X_2 لإنتاج مستوى معين من النتائج، وفي الحقيقة فإن العدد المحتمل لمثل هذه المجموعات قد يكون لا نهائي.

والمعادلة (2-16) تمثل دالة مستمرة والتقنية المتوفرة لصاحب المؤسسة هي تكون فقط المعلومات الفنية من مجموعات المدخلات الضرورية للحصول على المنتج المطلوب.

كما أن المعادلة (2-16) تحتوي على جميع الاحتمالات الفيزيائية وقد تنص التقنية المتوفرة على انه من الممكن استخدام مجموعة واحدة من X_1 و X_2 بعدد من الطرق المختلفة لإنتاج مستويات عديدة مختلفة من المنتجات، إذن لدوال الإنتاج أهمية في عملية التخطيط وفي تحليل وتيرة النمو وتحليلها كما أنها تساعد على الكشف عن الواقع الاقتصادي للعمليات الإنتاجية من حيث فاعلية استخدام العمل ورأس المال ومن حيث كثافة استخدام K و L. ولهذا عند وضع دالة كصيغة لعلاقة تربط متغيرات ظاهرة الإنتاج يجب مراعاة عدة جوانب أهمها:

- تكون الدالة مستوعبة لعناصر الإنتاج وبالكيفية التي تقوم هذه العناصر بالمساهمة بالإنتاج مع التركيز على الكيفية؛
- أن تمثل الدالة حالة الإنتاج كما ومرحلة وخلال المدة المدروسة فيها ظاهرة الإنتاج؛
- أن تكون قابلة للاختبار ضمن نقاط المدى الزمني لها أي ضمن فترتها الزمنية المحسوبة فيها؛
- أن تكون قابلة للتعبير عن علاقات الإنتاج في الوحدة الاقتصادية؛
- عند تقديرها "وهو الأهم" أن يكون التقدير معبرا عن سلوك المتغيرات الفعلية الجاهزة تحديدا، وإن كانت تعبر عن المستقبل فيشترط إدخال مستوى التقنية بصيغ أخرى.

أ- دوال الإنتاج المتجانسة

حجم الغلة

يمكن تعريف حجم الغلة لدوال الإنتاج المتجانسة بأن تكون دالة الإنتاج متجانسة من الدرجة k أي:

$$f(t\,x_1, t\,x_2) = t^k f(x_1, x_2) \qquad (2-17)$$

حيث k ثابت من الثوابت و t تكون أي رقم حقيقي موجب.

فإذا أزداد كلا المدخلين بمقدار العامل t فإن الناتج سوف يزداد بمقدار العامل t^k ويكون حجم الغلة في حالة تزايد إذا كانت $k > 1$ وثابتا إذا كانت $k = 1$ ومتناقصا إذا كان $0 < k < 1$ ومن العادة افتراض تجانس دوال الإنتاج من الدرجة الأولى.

ملاحظة

إن الاشتقاقات الجزئية لدالة متجانسة من الدرجة k تكون متجانسة من الدرجة $k-1$، ونخص هنا التجانس من الدرجة الأولى.فإذا كانت دالة متجانسة من الدرجة الأولى فإن الإنتاجية الحدية للمدخلين X_1 و X_2 تكونا متجانسين من الدرجة صفر بمعنى أنهما سوف يبقيان بدون تغير للتغيرات النسبية لكلا المدخلين.

ب- دالة الإنتاج لكوب دوجلاس

تعتبر من أحد المشاهير دوال الإنتاج المتجانسة الواسعة الاستعمال في الاقتصاد، وأهم الأسس التي اعتمد عليها كوب دوجلاس هي:

- يعد الإنتاج دالة لعاملين من عوامل الإنتاج هما العمل ورأس المال وأن كلا من العاملين يمكن أن يحل محل الآخر دون حدود؛
- إن الإنتاجية ثابتة بالنسبة لكل وحدة من وحدات العمل ورأس المال؛
- إن درجة كثافة استخدام العمل وأس المال ثابتة؛
- إن تبعية كمية الإنتاج لعاملي الإنتاج هي ذات شكل خطي، أي إذا تضاعف عاملا الإنتاج بعدد (λ) المرات فإن الإنتاج سوف يتضاعف أيضا بمقدار λ مرة، ويعني ذلك أن إنتاجية عوامل الإنتاج لا تتغير مع تغير حجم الإنتاج أي أن المرونة ثابتة.

ولقد حدد شكل دالة الإنتاج بالشكل التالي:

$$Q = f(x_1, x_2) = A\, x_1^{\alpha}\, x_2^{\beta}$$

$$(2\text{-}18)$$

$$Q = f(x_1, x_2) = A\, x_1^{\alpha}\, x_2^{1-\alpha}$$

حيث $\beta = 1-\alpha$ ، $0 < \alpha < 1$

وعند زيادة مستويات المدخلات بنسبة المعامل (t) سوف ينتج عنه الآتي:

$$\begin{aligned} f(t\,x_1, t\,x_2) &= A(t\,x_1)^{\alpha}(t\,x_2)^{1-\alpha} \\ &= t^{\alpha+1-\alpha} A\, x_1^{\alpha}\, x_2^{1-\alpha} \\ &= t\, f(x_1, x_2) \qquad (2\text{-}19) \end{aligned}$$

إذن دالة كوب دوجلاس تكون متجانسة من الدرجة الأولى والإنتاجيات الحدية لكلا المدخلين تكون متجانستين من الدرجة صفر.

$$1)\quad \frac{\delta f}{\delta x_1} = f_1^{'}(x_1, x_2) = \alpha\, A\, x_1^{1-\alpha}\, x_2^{1-\alpha}$$

$$\begin{aligned} f_1^{'}(t\,x_1, t\,x_2) &= \alpha\, A\,(x_1)^{\alpha-1}(t\,x_2)^{1-\alpha} \\ &= \alpha\, A\, x_1^{\alpha-1}\, x_2^{1-\alpha} \end{aligned}$$

$$2)\quad \frac{\delta f}{\delta x_2} = f_2^{'}(x_1, x_2) = (1-\alpha)\, A\, x_1^{\alpha}\, x_2^{-\alpha}$$

$$\begin{aligned} f_2^{'}(x_1, x_2) &= (1-\alpha)\, A(\,t x_1\,)^{\alpha}\,(t\,x_2)^{-\alpha} \\ &= (1-\alpha) A\, x_1^{\alpha}\, x_2^{-\alpha} \end{aligned}$$

نلاحظ أنه بدلالة كل من الثوابت α و $\beta = 1-\alpha$ يتم تحديد مؤشر الناتج الحدي للعمل والناتج الحدي لرأس المال اللذين يساعدان على تقدير درجة تغيير الإنتاج بتغير أحد العاملين مع ثبات العامل الآخر.

ملاحظة

دالة الإنتاج لكوب دوجلاس هي دالة ذات قيمة موجبة وهي متزايدة وأنها شبه مقعرة بانضباط منتظم ضمن المجال $x_1, x_2 > 0$.

مثال

نفرض أن دالة الإنتاج في بلد من بلدان تأخذ الشكل التالي:

$$Q = K^{0.58} L^{0.42}$$

حيث Q تمثل حجم الإنتاج، K رأس المال، L العمل

1- أحسب الناتج الحدي لكل من العمل ورأس المال عندما $K = 0,9$ و $L = 0,8$.

2- أحسب حجم النمو في الناتج عند زيادة حجم كل من العمل ورأس المال في وقت واحد.

الحل:

1)- الناتج الحدي للعمل:

$$\frac{\delta Q}{\delta L} = 0,42 \frac{K^{0.58}}{L^{0.58}} = 0,42 \frac{(0,9)^{0.58}}{(0,8)^{0.58}} \approx 0,519$$

- الناتج الحدي لرأس المال:

$$\frac{\delta Q}{\delta L} = 0,58\frac{L^{0,42}}{K^{0,42}} = 0,58\frac{(0,8)^{0,42}}{(0,9)^{0,42}} \approx 0,551$$

2) لحساب حجم نمو في الناتج عند زيادة حجم كل من العمل ورأس المال في وقت واحد نطبق مفهوم التفاضل الكلي على دالة كوب دوجلاس

$$dQ = \frac{\delta Q}{\delta K}dK + \frac{\delta Q}{\delta L}dL$$

$$dQ = A\alpha K^{\alpha-1}L^{\beta}dK + A\beta K^{\alpha}L^{\beta-1}dL$$

وبقسمة طرفي العلاقة الأخيرة على Q نجد النمو العائد للإنتاج

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{A\alpha K^{\alpha-1}L^{\beta}}{Q}dK + \frac{A\beta K^{\alpha}L^{B-1}}{Q}dL$$

حيث dQ زيادة في الناتج الكلي

dK زيادة في رأس المال

dL زيادة في العمل

ولتوضيح ذلك نفرض أن كلا من العمل ورأس المال قد إزداد بنسبة $r\%$ فيكون مقدار الزيادة كما يلي:

بما أن:

$$\frac{\Delta K}{K} = \frac{r}{100} \Rightarrow \Delta K = K.\frac{r}{100}$$

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{r}{100} \Rightarrow \Delta L = L.\frac{r}{100}$$

ويبلغ الحجم الإجمالي لرأس المال و العمل بالصورة التالية:

$$K + \Delta K = K + K.\frac{r}{100} = K(1 + \frac{r}{100})$$

$$L + \Delta L = L + L.\frac{r}{100} = L(1 + \frac{r}{100})$$

ويمكن صياغة الإنتاج بعد زيادة العمل ورأس المال معا بالشكل التالي:

$$Q + \Delta Q = A(K + \Delta K)^{\alpha} \ (L + \Delta L)^{\beta}$$

$$= A\left[K(1 + \frac{r}{100})\right]^{\alpha}\left[L(1 + \frac{r}{100})\right]^{\beta}$$

$$Q + \Delta Q = AK^{\alpha}(1 + \frac{r}{100})^{\alpha} L^{\beta}(1 + \frac{r}{100})^{\beta}$$

$$Q + \Delta Q = AK^{\alpha} L^{\beta}(1 + \frac{r}{100})^{\alpha+\beta}$$

بما أن $Q = AK^{\alpha} L^{\beta}$ إذن:

$$Q + \Delta Q = Q(1 + \frac{r}{100})^{\alpha+\beta}$$

1- نظرية أولر و دالة الإنتاج لكوب دوجلاس

تنص نظرية أويلر أن الشروط التالية:

$$x\frac{\partial Z}{\partial x} + y\frac{\partial Z}{\partial y} + \dots\dots\dots\dots + w\frac{\partial Z}{\partial w} = nZ \qquad (2-20)$$

تتحقق في أي دالة متجانسة، بأخذ المعادلة (2-16) نجد:

$$x_1 f_1^{'}(x_1, x_2) + x_2 f_2^{'}(x_1, x_2) = k f(x_1, x_2) \qquad (2-21)$$

تعطي هذه النظرية عدد من النتائج ذات قيمة للاقتصاد فإذا قسمنا طرفي المعادلة (2-21) على $f(x_1, x_2)$ نحصل على:

$$x_1 \frac{f_1'(x_1, x_2)}{f(x_1, x_2)} + x_2 \frac{f_2'(x_1, x_2)}{f(x_1, x_2)} = k \frac{f(x_1, x_2)}{f(x_1, x_2)}$$

$$x_1 \frac{A\alpha \, x_1^{\alpha-1} \, x_2^{1-\alpha}}{Ax_1^{\alpha} \, x_2^{1-\alpha}} + x_2 \frac{(1-\alpha) A x_1^{\alpha} \, x_2^{-\alpha}}{Ax_1^{\alpha} \, x_2^{1-\alpha}} = \alpha + (1-\alpha) = k$$

أي $\alpha + \beta = k$

حيث $(1 - \alpha = \beta)$

وهذه تدل على أن مجموع مرونتين المنتجين للمدخلين x_1و x_2 تساويان درجة التجانس.

ملاحظة

تعرف مرونة المنتج للمدخل x_1 ونرمز لها بالرمز ω_1 بأنها معدل التغير النسبي للمقدار Q بالنسبة للمدخل x_1 (عند أخذ المعادلة (2-16)

$$\omega_1 = \frac{\partial \log Q}{\partial \log x_1} = \frac{\partial Q}{\partial x_1} = \frac{x_1}{Q} = \frac{PPmg \, x_1}{PPm \, x_1} = \alpha$$

.

حيث $PPmgx_1$ تمثل الإنتاجية الحدية للمدخل x_1 و $PPmx_1$ تمثل الإنتاجية المتوسطة للمدخل x_1

$$\frac{\partial Q}{\partial x_1} = PPmgx_1 = \alpha x_1^{\alpha-1}\ x_2^{1-\alpha} = \frac{\alpha x_1^{\alpha}\ x_2^{1-\alpha}}{x_1} = \alpha \frac{Q}{x_1}$$

$$\frac{Q}{x_1} = \frac{x_1^{\alpha}\ x_2^{1-\alpha}}{x_1} = \frac{Q}{x_1}$$

$$\omega_1 = \frac{PPmgx_1}{PPmx_1} = \frac{\alpha(Q/x_1)}{Q/x_1} = \alpha$$

وإذا افترضنا أن دالة الإنتاج تكون متجانسة من الدرجة الأولى فعند تعويض في المعادلة (2-20) عن $Q = f(x_1, x_2)$ نحصل على:

$$x_1 f_1^{'}(x_1, x_2) + x_2 f_2^{'}(x_1, x_2) = Q \qquad (2-22)$$

العلاقة (2-22) تدل على أن إجمالي الناتج Q يساوي الناتج الحدي للمدخل x_1 مضروب في الكمية x_1 زائد الناتج الحدي للمدخل x_2 مضروب في الكمية x_2.

التفسير الاقتصادي

إذا قامت المؤسسة بدفع لموردي كل مدخل من المدخلات ناتجه المادي الحدي فإن إجمالي الناتج سوف يستنفد كاملا، وفي حالة درجة التجانس أكبر من الواحد سوف تزيد من الناتج وإذا كانت درجة التجانس أقل من الواحد سوف تقل من الناتج.

2- نظرية الإنتاج الحدية للتوزيع و دالة كوب دوجلاس

تتكون المفاهيم الأساسية لهذه النظرية من:

*أن كل من مدخل سوف يدفع له قيمة إنتاجه الحدي؛

*إن إجمالي الناتج سوف يستنفد كاملا.

وبما أن هذه الشروط تتحقق في دوال الإنتاج المتجانسة من الدرجة الأولى فلهذا استفيد من دالة كوب دوجلاس في المحاولة للتحقق من نظرية الإنتاج الحدية للتوزيع. فإذا كان Q يمثل إجمالي الناتج لـــ Q المخرج، x_1 و x_2 تمثلان إجمالي المدخلين وهما العمل ورأس المال على الترتيب، تكون نظرية أولر محققة إذا كان:

$$\begin{aligned} Q &= x_1\left(\alpha A x_1^{1-\alpha}\right) + x_2\left((1-\alpha) A x_1^{\alpha} x_2^{-\alpha}\right) \\ &= \alpha A x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha} + (1-\alpha) A x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha} \qquad (2-23) \end{aligned}$$

وبالتعويض عن $Q = A x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$ نجد:

$$Q = \alpha Q + (1-\alpha) Q \qquad (2-24)$$

تدل العلاقة (2-24) أنه عند دفع لكل عامل إنتاجه الحدي فإن إجمالي الناتج سوف يوزع بين العمل ورأس المال بالنسب التالية α و $(1-\alpha)$ على الترتيب وعند ضرب المعادلة (2-22) بسعر الإنتاج نحصل على:

$$x_1 (P f_1^{'}) + x_2 (P f_2^{'}) = PQ \qquad (2-25)$$

وهذا انطلاق من شرط استنفاد الإنتاج الذي يكون مكافئا لشرط الربح الأقصى في المدى الطويل والذي يساوي صفر.

وبما أن الحصول على الحد الأمثل لهذه الدالة المقيدة يتطلب شروط الدرجة الأولى كما يلي:

$$\frac{r_1}{r_2}=\frac{f_1^{'}(x_1,x_2)}{f_2^{'}(x_1,x_2)}=\frac{\alpha A x_1^{\alpha-1}x_2^{1-\alpha}}{(1-\alpha)A x_1^{\alpha}x_2^{\alpha}}$$
$$=\frac{\alpha x_2}{(1-\alpha)\,x_1}$$

فيكون مجرى التوسع معطاة بالدالة الضمنية التالية:

$$(1-\alpha)x_1 r_1-\alpha\ x_2 r_2=0 \qquad (2-26)$$

وأيضا عند تعويض عن $r_1=Pf_1^{'}$ و $r_2=Pf_2^{'}$ من الشروط الأولى لتحقيق الربح الأقصى في العلاقة (2-25)، نحصل على:

$$x_1 r_1+x_2 r_2=PQ \qquad (2-27)$$

تدل المعادلة الأخيرة على أن إجمالي النفقات الأولية للمدى الطويل تساوي إجمالي الإيرادات للمدى الطويل، كما أن الربح في المدى الطويل يساوي صفر بغض النظر عن مستوى السعر.

3-المعدل الحدي للإحلال التقني

وهو يمثل المعدل الحدي الذي يتم بموجبه إحلال العمل محل رأس المال محافظ على مستوى معين من الإنتاج، أي بمعنى يبيّن هذا المعدل كم وحدة من العمل ضرورية للحلول محل وحدة رأس المال من أجل إنتاج الحجم نفسه من المنتجات. حيث $Q = f(x_1, x_2)$ (x_1 تمثل العمل وx_2 رأس المال)

$$TMST_{x_1x_2} = \frac{f'_{x_1}}{f'_{x_2}} = \frac{\beta(Q/x_1)}{\alpha(Q/x_2)}$$

$$TMST_{x_1x_2} = \frac{\beta}{\alpha}\frac{x_2}{x_1} \qquad (2-28)$$

ويتضح أن هذا المعامل يتحدد بالعلاقة بين معلمتي الدالة β/α.

وإذا كانت زيادة كمية معينة من رأس المال تعوض الانخفاض في الإنتاج نتيجة تخفيض مستويات العمل يمكن استخدام مفهوم النواتج الحدية لحساب المعدل الحدي لإحلال رأس المال محل العمل.

$$TMST_{x_2x_1} = \frac{f'_{x_2}}{f'_{x_1}} = \frac{\alpha(Q/x_2)}{\beta(Q/x_1)}$$

$$TMST_{x_2x_1} = \frac{\alpha}{\beta}\frac{x_1}{x_2} \qquad (2-29)$$

وهذا يبيّن كم وحدة من رأس المال ضرورية لحلول محل وحدة من العمل للحصول على المستوى نفسه من الإنتاج، وهذا يتحدد عند مستوى معين من التجهيز التقافي بالعلاقة بين معلمتي الدالة (α / β).

4- مرونة الإحلال

تعد مرونة الإحلال مفهوما تكنواقتصاديا فهي تعكس العلاقة بين التغيرات معدلات نمو العمل ورأس المال من جهة وتغيرات في نواتجها الحدية من جهة أخرى.

$$\sigma = \left(d\left(x_1 / x_2\right) / dTMST_{x_1 x_2}\right)\left(TMST_{x_1 x_2} / \left(x_2 / x_1\right)\right) = 1$$

$$\sigma = \frac{d(x_2 / x_1)}{dTMST_{x_2 x_1}} \cdot \frac{TMST_{x_2 x_1}}{x_2 / x_1} = 1 \qquad (2-30)$$

لإثبات ذلك لدينا:

$$TMST_{x_1 x_2} = \frac{\alpha}{\beta} \frac{x_1}{x_2}$$

ومنه نجد

$$\frac{x_1}{x_2} = TMST_{x_1 x_2} \cdot \frac{\beta}{\alpha}$$

$$\frac{d(x_1 / x_2)}{dTMST_{x_1 x_2}} = \frac{\beta}{\alpha}$$

وبتطبيق مفهوم المرونة نحصل على:

$$\sigma = \frac{d(x_1 / x_2)}{dTMST_{x_1 x_2}} \cdot \frac{TMST_{x_1 x_2}}{(x_1 / x_2)} = 1$$

$$\sigma = \frac{\beta}{\alpha} \frac{(\alpha / \beta)(x_1 / x_2)}{(x_1 / x_2)} = 1$$

إذا كان $\sigma = 1$ يدل على تعـــادل انخفاض الناتج الحدي لرأس المال بالنسبة إلى الناتج الحدي للعمل مع زيادة رأس المال بالنسبة إلى زيادة العمل.

أما إذا كانت مرونة الإحلال أكبر من الواحد $\sigma > 1$ فإن هذا التغير في العلاقة بين معدلات زيادة الناتجين الحديين لرأس المال والعمل يرجع إلى تغيرات أكثر أهمية في معدلات زيادة رأس المال بالنسبة للعمل.

جـ- دالة الإنتاج دات المرونة الاحلالية الثابتة CES

تأخذ هذه الدالة الصيغة التالية:

$$Q = A\left(\alpha x_1^{-p} + (1-\alpha) x_2^{-p}\right)^{-1/P} \qquad (2-31)$$

حيث أن Q تمثل كمية الإنتاج، x_1 تمثل وحدات رأس المال و x_2 تمثل وحدات العمل. $A > 0$ ثابت يمثل كفاءة أو مستوى التقنية الفنية للإنتاج $0 < \alpha < 1$ تمثل توزيع الدخل بين عناصر الإنتاج، $P > -1$ ثابت ويمثل مرونة الإحلال. وتتميز هذه الدالة بجملة من الخصائص أهمها:

1- أنها دالة متجانسة من الدرجة الأولى وهذه الخاصية تماثلها بدالة كوب دوجلاس؛

2- إنتاجية كل عنصر من عناصر الإنتاج تكون موجبة ؛

3- يكون معدل الإحلال التقني لهذه الدالة سالبا، ومعدل الإحلال ثابت ولكن ليس بالضرورة مساويا للواحد.

ومن السهل التحقق من أن العلاقة (2-31) متجانسة من الدرجة الأولى بتطبيق متطابقة أولر:

$$\frac{\delta Q}{\delta x_1} = -\frac{1}{P} A\left[\alpha\, x_1^{-P} + (1-\alpha)\, x_2^{-P}\right]^{-1/P-1} (-P\alpha\, x_1^{-P-1})$$

$$= A\alpha\, x_1^{-P-1}\left[\alpha\, x_1^{-P} + (1-\alpha)\, x_2^{-P}\right]^{-1/P-1}$$

$$x_1\frac{\delta Q}{\delta x_1} = x_1\left[A\alpha\frac{x_1^{-P}}{x_1}(\alpha\, x_1^{-P} + (1-\alpha)\, x_2^{-P})^{-1/P-1}\right]$$

$$= A\alpha\, x_1^{-P}\left[\alpha\, x_1^{-P} + (1-\alpha)x_2^{-P}\right]^{-1/P-1}$$

$$\frac{\delta Q}{\delta x_2} = -\frac{1}{P} A\left[\alpha\, x_1^{-P} + (1-\alpha)\, x_2^{-P}\right]^{-1/P-1} (-P(1-\alpha)\, x_2^{-P-1})$$

$$= A(1-\alpha)\, x_2^{-P-1}\left[\alpha\, x_1^{-P} + (1-\alpha)\, x_2^{-P}\right]^{-1/P-1}$$

$$x_2\frac{\delta Q}{\delta x_2} = x_2\left[A(1-\alpha)\frac{x_2^{-P}}{x_2}[\alpha\, x_1^{-P} + (1-\alpha)\, x_2^{-P}]^{-1/P-1}\right]$$

$$= A(1-\alpha)\, x_2^{-P}\left[\alpha\, x_1^{-P} + (1-\alpha)\, x_2^{-P}\right]^{-1/P-1}$$

إذن بتطبيق متطابقة أولر

$$A\alpha\, x_1^{-p}\left[\alpha\, x_1^{-P} + (1-\alpha)\, x_2^{-P}\right]^{-1/P-1} + A(1-\alpha)\, x_2^{-P}\left[\alpha\, x_1^{-P} + (1-\alpha)\, x_2^{P}\right]^{-1/P-1} =$$
$$A\left[\alpha\, x_1^{-P} + (1-\alpha)\, x_2^{-P}\right]^{-1/P-1}\left[\alpha\, x_1^{-P} + (1-\alpha)\, x_2^{P}\right] =$$

$$A\left[\alpha\, x_1^{-P} + (1-\alpha)\, x_2^{-P}\right]^{-1/P}\left[\alpha\, x_1^{-P} + (1-\alpha)x_2^{-P}\right]^{-1}\left[\alpha\, x_1^{-P} + (1-\alpha)\, x_2^{-P}\right] =$$
$$A\left[\alpha\, x_1^{-P} + (1-\alpha)\, x_2^{-P}\right]^{-1/P} = Q$$

درجة التجانس تساوي 1، أما الإنتاجيات الحدية للمدخلات فهي:
من العلاقة (2-31) نجد:

$$Q^{-P} = A^{-P} \left(\alpha x_1^{-p} + (1-\alpha) x_2^{-p}\right) \qquad (2-32)$$

نفاضل طرفي العلاقة (2-32) نجد بالنسبة لـ x_1

$$(-PQ^{-P-1})\,\delta Q = (A^{-P})(-P\alpha x_1^{-P-1})\,\delta x_1$$

$$-PQ^{-P-1}\frac{\delta Q}{\delta x_1} = A^{-P}(-P\alpha x_1^{-P-1})$$

$$\frac{\delta Q}{\delta x_1} = \frac{-PA^{-P}\alpha x_1^{-P-1}}{-PQ^{-P-1}} = \frac{\alpha}{A^P}\left(\frac{Q}{x_1}\right)^{P+1}$$

وبالمثل نجد:

$$Q^{-P} = A^{-P}\left(\alpha x_1^{-p} + (1-\alpha) x_2^{-p}\right)$$

نفاضل طرفي العلاقة (2-32) بالنسبة x_2 نجد:

$$-PQ^{-P-1}\,\delta Q = (A^{-P})\left(-p(1-\alpha)x_2^{-p-1}\right)\delta x_2$$

$$\frac{\delta Q}{\delta x_1} = \frac{-PA^{-P}(1-\alpha)\,x_2^{-P-1}}{-PQ^{-P-1}} = \frac{1-\alpha}{A^P}\left(\frac{Q}{x_2}\right)^{P+1}$$

مرونة الإحلال:

$$\sigma = \left[d(x_2/x_1)/TMST\right]\left[TMST/(x_2/x_1)\right] = 1/(1+\rho)$$

$$\sigma = \left[d(K/L)/dTMST\right]\left[TMST/(K/L)\right] = 1/(1+\rho)$$

في حالة $\quad P \to 0 \;\Rightarrow\; \sigma \to 1$

تصبح دالة الإنتاج ذات المرونة الاحلالية الثابتة تماثل دالة كوب دوجلاس ذات مردودية السلم الثابتة $\alpha + \beta = 1$

2-7-2- توازن السوق يحوي على سلعتين

تأخذ دوال الطلب والعرض الشكل التالي:

$$X_{d1} = a_0 + a_1 P_1 + a_2 P_2$$
$$X_{s1} = \alpha_0 + \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2$$
$$X_{d2} = b_0 + b_1 P_1 + b_2 P_2$$
$$X_{s2} = \beta_0 + \beta_1 P_1 + \beta_2 P_2$$

يتكون النموذج الخطي من أربع معادلات سلوكية ومن شرطي لتوازن حيث تمثل X_{d1} و X_{d2} كميات الطلب على السلعة (1) والسلعة (2)، وتمثل X_{s1} و X_{s2} كميات العرض من السلعة (1) والسلعة (2)، و تمثل P_1 و P_2 أسعار السلعتين (1) و (2) على التوالي.

نلاحظ أن هذا النموذج يحتوي على ستة مجاهيل تتمثل في $\lfloor X_{d2},\ X_{d1},\ X_{s2},\ X_{s1},\ P_2,\ P_1 \rfloor$ بتطبيق شرط التوازن نحصل على المعادلتين التاليتين:

$$X_{d1} = X_{s1} \Rightarrow a_0 + a_1 P_1 + a_2 P_2 = \alpha_0 + \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2$$
$$X_{d2} = X_{s2} \Rightarrow b_0 + b_1 P_1 + b_2 P_2 = \beta_0 + \beta_1 P_1 + \beta_2 P_2$$

ومنه نجد:

$$a_0 + a_1 P_1 + a_2 P_2 - \alpha_0 - \alpha_1 P_1 - \alpha_2 P_2 = 0$$
$$(a_0 - \alpha_0) + (a_1 - \alpha_1) P_1 + (a_2 - \alpha_2) P_2 = 0 \qquad (2-33)$$

$$b_0 + b_1 P_1 + b_2 P_2 - \beta_0 - \beta_1 P_1 - \beta_2 P_2 = 0$$
$$(b_0 - \beta_0) + (b_1 - \beta_1) P_1 + (b_2 - \beta_2) P_2 = 0 \qquad (2-34)$$

المعادلتين (2-33) و(2-34) بمجهولين، وبحلهما نحصل على $\overline{P}_1$ و $\overline{P}_2$ أسعار التوازنية التي تحقق من أجلها جملة المعادلتين. وعند تعويض عن قيمتها في دوال الطلب والعرض نحصل على كميات التوازنية $\overline{X}_{d1}$، $\overline{X}_{d2}$، $\overline{X}_{S1}$، $\overline{X}_{S2}$.

مثال:

أحسب السعر وكمية التوازن للسلعتين إذا كانت دوال العرض والطلب لهما محددة بالشكل التالي:

السلعة الأولى

$$\left.\begin{aligned} Q_{d1} &= 410 - 5P_1 - 2P_2 \\ Q_{S1} &= -60 + 3P_1 \end{aligned}\right\}$$

السلعة الثانية

$$\left.\begin{aligned} Q_{d2} &= 295 - P_1 - 3P_2 \\ Q_{S1} &= -120 + 2P_2 \end{aligned}\right\}$$

من شرط التوازن:

$$Q_{d1} = Q_{S1}$$

$$470 - 8P_1 - 2P_2 = 0 \qquad (1)$$

$$Q_{d1} = Q_{s2}$$

$$415 - P_1 - 5P_2 = 0 \qquad (2)$$

نلاحظ أن لدينا جملة من معادلتين بمجهولين، يمكن أن نحصل على قيمها باستخدام الطريقة الجبرية مباشرة:

$$\overline{P}_2 = 75 \quad ، \quad \overline{P}_1 = 40$$

نعوض عن $\overline{P}_1$ و $\overline{P}_2$ في كلا من المعادلتين للطلب أو العرض للسلعتين نجد:

$$Q_{S1} = Q_{d1} = 60$$

$$Q_{S2} = Q_{d2} = 30$$

ملاحظة

في حالة فرض ضرائب على السوق تحوي سلعتين سواء كانت ضرائب الإنتاج النوعية أو ضرائب الإنتاج القيمية، يمكن تطبيق نفس العمليات التي تم تطبيقها في سوق تحوي سلعة واحدة.

2-7-3- التوازن للدخل الوطني بدون وجود قطاع حكومي – إقتصاد مغلق

يتحدد مستوى التوازن للدخل عندما يتعادل الناتج الوطني [القومي] من السلع والخدمات مع الطلب على هذه السلع والخدمات.

يتحقق التوازن في الاقتصاد بالمساواة التالية:

$$Y = C + I \qquad (2-35)$$

ويعني ذلك أن الدخل الوطني يساوي مجموع نفقات الاستهلاك والاستثمار *(C+I)* وهذا باستبعاد قطاع التجارة الخارجية والقطاع الحكومي.

يمكن صياغة نموذج الدخل الوطني بالمعادلات التالية:

$$Y = C + I \qquad (2-36)$$

$$C = f(y) = a + bY \qquad (2-37) \qquad a\rangle 0, \quad 0\langle b \langle 1$$

$$I = I_0 \qquad .(2-38) \qquad I_0 \rangle 0$$

لإيجاد القيم التوازنية للدخل Y والاستهلاكC نقوم بحل معادلات النموذج، نعوض المعادلتين (2-37) و(2-38) في المعادلة (2-36) نحصل على:

$$Y = a + bY + I_0$$

$$Y - bY = a + I_0$$

$$Y[1-b] = a + I_0$$

$$\overline{Y} = \frac{a + I_o}{1-b} \qquad (2-39)$$

العلاقة (2-39) تمثل القيمة التوازنية للدخل.

و للحصول على مستوى الاستهلاك نعوض (2-39) في المعادلة (2-37) نحصل على:

$$C = a + b\overline{Y}$$

$$= a + b\left(\frac{a + I_0}{1-b}\right)$$

$$\overline{C} = \frac{a(1-b) + b(a + I_0)}{1-b} \qquad (2-40)$$

تبيّن العلاقتين (2-39) و(2-40) أن القيم التوازنية للدخل والاستهلاك مفسرة بدلالة الثوابت a, b, I_0.

تمارين الفصل الثاني

التمرين 1-2

عين القيم القصوى إن وجدت للدالة التالية:

$$u = f(x, y, z) = -x^2 + 2x + 3y - y^2 - z^2$$

التمرين 2-2

أوجد القيم القصوى للدالة

$z = x^2 + y^2$ وفقا للقيد $x + 4y = 2$.

التمرين 3-2

أوجد المشتقات الجزئية لــ

$(dz/du)\, dv = 0$ و $(dz/dv)\, du = 0$

بحيث:

$$z = a x^2 + bxy + cu$$

و

$$x = \alpha u + \beta v$$
$$y = \gamma u$$

التمرين 4-2

لنفرض أن U كمية الطلب على السلعة A تخضع للعلاقة التالية:

$$U = k y \sqrt{z}\, \ell^{-2x}$$

حيث x يرمز سعر الواحدة من السلعة A و Z و y على الترتيب لسعر الواحدة من السلع B،C البديلة و K عدد ثابت موجب.

كما نفرض أن توازن السوق يتم عندما $Z=4$، $y=2$، $x=1$.

المطلوب:

-حساب مقدار التغير في كمية الطلب على السلعة A عندما يتناقص كل من x و y على الترتيب بمقدار 0.05 و 0.1 اعتبارا من وضع التوازن مع بقاء z ثابتة.

التمرين 5-2

لنفرض أن Q كمية الإنتاج لسلعة معينة A تخضع للعلاقة التالية:

$$Q = a\,x\,y - bx^2 - Cy^2$$

حيث a,b,c ثوابث موجبة، x و y على الترتيب عوامل الإنتاج حيث x كمية رأس المال و y كمية العمل، و نفترض أن هذه الكميات تتبع عامل الزمن وفق العلاقات التالية:

$$y = \beta t \qquad\qquad x = \alpha^t$$

حيث β و α ثوابت موجبة.أحسب معدل تغير في إنتاج السلعة A بالنسبة للزمن.

التمرين 6-2

لدينا دالة الإنتاج من نوع كوب دوجلاس التالية:

$$Q = f(x_1, x_2) = 3x_1^{0.6}\ x_2^{0.4}$$

حيث Q حجم الإنتاج، x_1 العمل، x_2 رأس المال

المطلوب:

1- أحسب الإنتاجية الحدية لكل من x_1 و x_2 من أجل $x_2 = 10$ ، $x_1 = 4$ و فسر النتائج

2- أحسب مرونة الناتج بالنسبة للعمل x_1 و رأس المال x_2 عند $x_1 = 4$ و $x_2 = 10$

3- بيّن أن مرونة الإحلال لهذه الدالة تساوي 1 $(\sigma = 1)$

4- بكم مرة يتضاعف الإنتاج، إذا ضاعفنا كل عامل من عوامل الإنتاج بمقدار ثلاث مرات $(\lambda = 3)$.

التمرين 7-2

نعبر عن دالة الإنتاج بالعلاقة التالية:

$$X(K,L) = A\left(\alpha\, K^{-p} + (1-\alpha)L^{P}\right)^{-1/P}$$

حيث $P \in IR_+^*$ ، $0 < \alpha < 1$

X يمثل الناتج المحلي الإجمالي، L يد العاملة، K رأس المال و A معامل الكفاءة.

المطلوب:

1- أحسب $\frac{\delta X}{\delta L}$ و $\frac{\delta X}{\delta L}$ بدلالة $\frac{X}{L}$ و $\frac{X}{K}$

2- استنتج $\frac{\delta K}{\delta L}$ بدلالة $\frac{K}{L}$ ثم اثبت أن: $\sigma = \frac{d \log\left(\frac{K}{L}\right)}{d\left(\log \frac{\delta K}{\delta L}\right)}$

3- إذا كانت ω و r و P أسعار الوحدات على التوالي L، K و X، بيّن أن K و L مرتبطين بالحد الأدنى للعلاقة $C = \omega L + r K$ عندما يكون المردود الحدي للعاملين متناسب مع تكلفتهما أي:

$$\left(\frac{\delta X}{\delta L}\right)\frac{1}{\omega} = \left(\frac{\delta X}{\delta K}\right)\left(\frac{1}{r}\right)$$

وعند أخذ بعين اعتبار أن $C = PX$، احسب $\frac{\omega L}{PX}$ و $\frac{rK}{PX}$ بدلالة $\frac{X}{L}$ و $\frac{X}{K}$ على الترتيب.

التمرين 8-2

لنفرض أن الكمية المنتجة Q من سلعة مفروضة في مؤسسة تتعلق بعاملين فقط من عوامل الإنتاج نرمز لهما بـــ x و y اللذين يمثلان على الترتيب رأس المال والعمل، كما أننا نفرض أن كمية الإنتاج Q تتحدد وفق تابع كوب دوجلاس بالشكل التالي:

$$Q = K\ x^{\alpha}\ y^{\beta}$$

حيث K, α, β ثوابت موجبة

المطلوب:

1- دراسة تجانس لدالة كوب دوجلاس المفروضة

2- حساب الإنتاجية الحدية بالنسبة لرأس المال والعمل على حدا

3- بيان إمكانية تحقق نظرية أولر بالنسبة لهذه الدالة

4- حساب المرونة الجزئية للإنتاج بالنسبة لكل من رأس المال والعمل

5- دراسة طبيعة منحنى الناتج المتساوي الموافق لكمية الإنتاج قدره Q_0

التمرين 9-2

بفرض توازن السوق معرف بالحل المشترك لجملة المعادلتين

$$f(Q, a) - P = 0$$

$$g(Q) - P = 0$$

حيث تمثل Q الكمية المباعة في السوق من سلعة مفروضة، P سعر هذه السلعة، f دالة الطلب على السلعة و g دالة الإنتاج للسلعة ذاتها و a مؤشر اقتصادي يمثل ذوق المستهلك.لنفرض أن:

$$\frac{dg}{dQ} \succ 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial Q} \prec 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial a} \succ 0$$

المطلوب:

إيجاد إشارة كل من $\frac{dQ}{da}$ و $\frac{dP}{da}$ مبينا مفهوم كل منهما.

التمرين 10-2

لنفرض أن كميات الطلب و كميات العرض في سوق تحوي سلعتين تتحدد وفق النموذج التالي:

$$X_{d1} = 18 - 3P_1 + P_2$$
$$X_{d2} = 12 + P_1 - 2P_2$$
$$X_{S1} = -2 + 4P_1$$
$$X_{S2} = -2 + 3P_1$$
$$X_{d1} = X_{S1}$$
$$X_{d2} = X_{S2}$$

1- حدد كل من $\overline{P}_1$، $\overline{P}_2$، X_{d1}، X_{d2}، X_{S1} و X_{S2}.

2- تفرض الحكومة ضريبة مقدارها 3 دج على السلعة الأولى و2 دج على السلعة الثانية ما هو تأثير ذلك على الأسعار والكمية التوازنية؟

3- نتيجة السياسة الإصلاحات التي قامت بها الحكومة، فرضت على المنتجين ضريبة قيمية كان معدلها 20% على السلعة الأولى و15% على السلعة الثانية ما هو تأثير ذلك على الأسعار والكميات التوازنية.

التمرين 11-2

أعطيت لك المعلومات التالية المتعلقة باقتصاد إحدى الدول:

- يقدر الميل الحدي للاستهلاك الخاص من الدخل 0,80
- يبلغ مضاعف الاستثمار 2,5
- تنفق الحكومة ضعف الاستهلاك الخاص المستقل
- تقدر الاستثمارات بربع الدخل الوطني

المطلوب:

تحديد المستويات التوازنية للدخل الوطني، للاستثمارات، للاستهلاك الخاص وللإنفاق العام إذا علمت أن الفرق بين الإيراد و الإنفاق الحكومي يبلغ 600 مليون وحدة نقدية.



الفصل الثالث

التكامل لدالة ذات متغير واحد حقيقي

3-1- التكامل المحدد

3-2- التكامل غير المحدد

3-3- قواعد التكامل

3-4- تطبيق اقتصادي

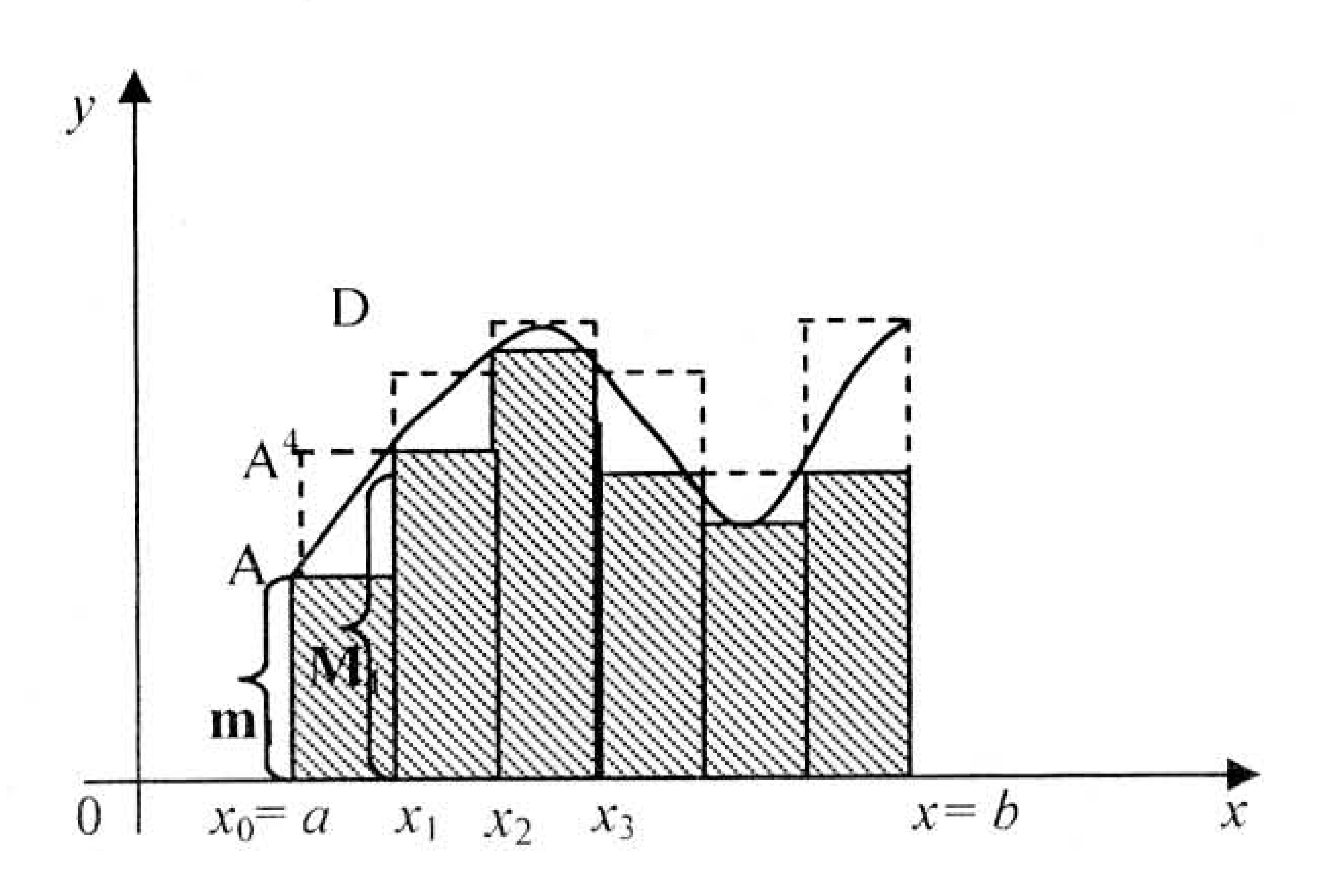


التكامل هوعملية إيجاد نهاية قيمة حاصل جمع مجموعة من الحدود عندما يزداد عدد هذه الحدود إلى ما لانهاية وعندما تقترب القيمة العددية لكل حد إلى الصفر.

3-1- التكامل المحدد

3- 1-1- تكامل ريمان

نفرض أن الدالة $f(x)$ مستمرة ومتزايدة ورتيبة، كما نفرض من جهة أن هذه الدالة $f(x)$ لا تأخذ إلا القيم المحددة في المجال [a b]، وتكون كل من $f(a)$ و $f(b)$ موجبة.



نقسم المجال $[a \quad b]$ إلى n مجالات جزئية من خلال النقاط:

$$a = x_0 , x_1 , x_2, \; ....x_n = b$$

بحيث

$$x_0 < x_1 < x_2 < \; ..... < x_n$$

وعند وضع:

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0, \;\; \Delta x_2 = x_2 - x_1 ...... , \; \Delta x_n = x_n - x_{n-1}$$

وتحديد القيمتين لــ $f(x)$ والذي نرمز للقيمة السفلى بــ m_i وللقيمة العليا بــ M_i يمكن إيجاد المجموعين:

$$\underline{S}_n = (x_1 - x_0)m_1 + (x_2 - x_1)m_2 + ... + (x_n - x_{n-1})m_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

$$\overline{S}_n = (x_1 - x_0)M_1 + (x_2 - x_1)M_2 + ... + (x_n - x_{n-1})M_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

حيث $\overline{S}_n$ المجموع الأعلى للتكامل و $\underline{S}_n$ المجموع الأسفل للتكامل.

إذا ازدادت عدد المجالات الجــزئية بشكــل لا متنــاهي، فــإن هذا يؤدي بلا شك إلى $max\ \Delta x_i \to 0$.

ولتكن الآن $\xi_1, \xi_2 .... \xi_n$, n قيم تنتمي إلى المجالات التالية على الترتيب:

$$x_1 - a\ ,\quad x_2 - x_1\ ,\qquad ....x_n - x_{n-1}$$

نضع المجموع:

$$S_n = \Delta x_1 f(\xi_1) + \Delta x_2 f(\xi_2) + ... + \Delta x_n f(\xi_n) = \sum_{t=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i$$

فهذا المجموع يسمى بمجموع التكامل للدالة $f(x)$ على المجال $[a \quad b]$.

لدينا:

$$m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i \qquad (3\text{-}1)$$

وبما أن $\Delta x_i > 0$ إذن يمكن أن نضرب أطراف المتباينة بــ Δx_i

$$m_i\, \Delta x_i \leq f(\xi_i)\, \Delta x_i \leq Mi\, \Delta x_i \qquad (3\text{-}2)$$

ومنه:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \,\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \,\Delta x_i$$

أو

$$\underline{S}_n \leq S_n \leq \overline{S}_n \qquad (3\text{-}3)$$

حيث S_n هو نهاية كل من $\overline{S}_n$ و $\underline{S}_n$ عندما ينتهي عدد المجالات الجزئية إلى اللانهاية بحيث يصبح طول كل مجال جزئي لا متناهي في الصغر، ويتم ذلك بتقسيم كل مجال جزئي x_0, x_1 إلى مجالات جديدة. المجال $x_i - x_{i-1}$ يؤول إلى dx عندما $n \to \infty$ إذن:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

يسمى بالتكامل المحدد أو تكامل ريمان وهو عبارة عن مجموع عدد غير متناهي من الكميات $f(x)\ dx$ والتي تمثل مجموع سطح مستطيلات.
إذا كانت النهاية موجودة و f قابلة للمكاملة على المجال [a b] يمكن كتابة:

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \underline{S}n = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \overline{S}n = \int_a^b f(x)dx \qquad (3-4)$$

إذن التكامل المحدد هو النهاية التي يؤول إليها حاصل الجمع للعلاقة الأخيرة عندما ينتهي أكبر مجال من بين المجالات الجزئية إلى الصفر وتسمى بالتكامل المحدد للدالة $f(x)$.

نسمي طرفا المجال $[a \quad b]$ – وهو مجال التكامل – بنهايتي التكامل أو حدي التكامل، حيث a النهاية السفلى و b النهاية العليا.

3-1-2- الخواص العامة للتكامل المحدد

من التعريف للرمز $\int_a^b f(x)dx$ يمكن استنتاج خواص التكامل التالية:

أ-
$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

ب-
$$\int_a^b \lambda\, f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$$

حيث λ عدد ثابت

جـ- إذا كانت $f(x) > 0$ في المجال [a b] تكون $\int_a^b f(x)dx$ موجبة

وعليه إذا كانت $f(x) > 0$ فكل حدود للمجموعين $\underline{S}_n$ و $\overline{S}_n$ تكون موجبة.

د- إذا كانت لكل قيمة من المجال [a b]، $f(x) < g(x)$ فيكون:

$$\int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx$$

وفي الواقع

$$\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx$$

تكون موجبة لأن $g(x) \times f(x) > 0$

هـــ- إذا قمنا باستبدال لحدي المجال $[b \quad a]$ فالتزايد
$\Delta x = x_{k+1} - x_k$ يغير في إشارة المجموعين $\underline{S}_n$ و $\overline{S}_n$ إذن:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

م- نفرض أن C عدد ثابت محتوى بين a و b يمكننا تجزئة المجال $[a\ b]$
إلى $[a \quad c]$ و $[c \quad b]$ وعند تجزئة هذا إلى مجالات $[x_k \quad x_{k+1}]$ التي
تؤول إلى الصفر فإننا يمكن أن نحصل على المجموع المقابل لكل مجال
كما يلي:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

2-3 التكامل غير المحدد

هو التكامل الذي يتخذ أي قيمة محددة لأنه يساوي $[f(x)+c]$ مما يعني
أن التكامل غير المحدد هو دالة أخرى في المتغير المستقل.
مثلا: لتكن الدالة $f(x)=3x^2$ المعرفة والمستمرة على IR، فالدالة
المحددة بالعلاقة $F(x)=x^3$ هي دالة أصلية لـــ f وذلك لأن مشتقة
$F(x)=x^3$ هي الدالة $f(x)=3x^2$. ليكن C عدد ثابتا ما لدالة:

$$\phi(x) = F(x) + C = x^3 + C \qquad (3-5)$$

هي دالة أصلية لـــ f لأن $\phi^{'}(x) = 3x^2$.

يستنتج من ذلك إذا كان f مستمرا على المجال $[a \ \ b]$ فإنه له عددا لا متناهيا من الدوال الأصلية تختلف عن بعضها البعض بقيم ثابتة مثال على ذلك:

$$F_1(x) = x^3 + 1 \qquad F_2(x) = x^3 + 5 \qquad F_3(x) = x^3 - 10$$

3-3- قواعد التكامل

يمكن عن طريق الجدول أدناه وبإجراء عمليات حسابية بسيطة للمكاملة، نحصل على الدالة الأصلية $F(x)$، [تكون الدالة الأصلية على العموم بشكل $F(x) + c$ حيث C عدد ثابت اختياري.

$f(x)$	$F(x)$	مجال الصلاحية
عدد حقيقي معطى a	$a\,x$	IR
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$n \in N$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$n \in IR - Z$
x^α	$x^{\alpha+1} / \alpha + 1$	$\alpha \in Z - \{0, -1\}$
$1/x$	$Log\ \|x\|$	IR^*
$Log\ \|x\|$	$x \log \|x\| - x$	IR^*
$\frac{1}{a^2 - x^2} (a \neq 0)$	$\frac{1}{2a} \log\left\|\frac{x+a}{x-a}\right\|$	$IR - \{-a, a\}$

نعطي الآن بعض القواعد العامة للمكاملة في التكاملات غير المحددة.

3-3-1- تبديل المتغير

نعلم أن:

$$F(x) = \int f(x)\, dx \Leftrightarrow d\, F(x) = f(x)\, dx \qquad (3\text{-}6)$$

إذا كانت $x = \varphi(t)$ تعرف تقابلا لمجموعة التعريف لـــ f في المجال Δ فإن الدالة العكسية هي $t = \psi(x)$ ونعلم أن:

$$d\left[F(\varphi(t))\right] = F'\left[\varphi(t)\right] \times \varphi'(t)\, dt = f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)\, dt$$

إذن:

$$F\left[\varphi(t)\right] = \int f(\varphi(t) \times \varphi'(t) dt = \Phi(t)$$

إذا تم حساب التكامل الأخير، فقيمة $\Phi(t)$ تصبح:

$$F(x) = \Phi\left[\psi(x)\right] \qquad (3-7)$$

*** تغير المتغير في التكامل المحدد**

بإمكاننا الانطلاق بنفس الخطوات السابقة عند حساب التكامل

أي:

$$I = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

$$= F\left[\varphi(\beta)\right] - F\left[\varphi(\alpha)\right]$$

فإذا قمنا بوضع:

$$\alpha = \psi(a) \quad , \qquad \beta = \psi(b)$$

إذن:

$$I = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\, \varphi'(t)dt \qquad (3-8)$$

نلاحظ أنه من غير الممكن محاولة العودة إلى المتغير x لإن التبديل المتغير في التكامل $\int_a^b f(x)dx$ يمكن أن ينعكس في ثلاث نقاط:[**على الدالة** $f(x)$ **وعلى التفاضل** dx **وعلى حدي التكامل]** وبالتالي نحصل على تكامل بمتغير جديد بدون الرجوع إلى المتغير الأصلي (t).

3-3-2- المكاملة بالتجزئة

إذا كانت كل من $u(x)$ و $v(x)$ دالتان قابلتان للاشتقاق في مجال تعريف واحد، فإننا نعلم أن:

$$d(uv) = udv + vdu = uv'dx + vu'dx$$

يمكن استنتاج الصيغة التي تعبر عن المكاملة بالتجزئة

$$\int u\, dv = u\, v - \int v\, du \qquad (3-9)$$

ملاحظة

1) إن طريقة التجزئة في حساب التكامل تطبق بشكل عام في العبارة المحتواة على جداء دالتين.

2) أن الجزء $\int v\,du$ من العلاقة (3-9) يجب أن يكون أبسط شكلا من الجزء $\int u\,dv$

3) طريقة التجزئة في التكامل تقوم على أساس مرحلتين في الحساب (مرحلة اشتقاق تفاضل، ومرحلة التكامل)، وعليه فيجب أن نحدد بالتقريب في الذهن ما يمكن أن يعطينا إياه اختيار الدالة v أو u لأن عدم تحديد الاختيار المناسب قد تعطينا العلاقة (3-9) تكاملا أصعب من التكامل الأصلي.

4) بإمكاننا تطبيق طريقة التجزئة في حساب التكامل عدة مرات متتالية.

5) أن عملية تكرار لطريقة التجزئة في حساب تكامل ما يمكن أن تؤدي بنا أحيانا إلى الحصول على التكامل الأصلي.

مثال:

أحسب التكامل التالي:

$$f(x) = \int x^2 Log(x^2+1)dx$$

نضع:

$$Log\,(x^2+1) = v$$

$$\frac{2x}{x^2+1}dx = dv$$

$$x^2\,dx = dv$$

$$\frac{x^3}{3} = v$$

نطبق العلاقة (3-9)

$$\int x^2 Log(x^2+1)dx = \frac{x^3}{3}Log(x^2+1) - \int \frac{x^3}{3}\frac{2x}{x^2+1}dx$$

$$= \frac{x^3}{3}Log(x^2+1) - \frac{2}{3}\int \frac{x^4}{x^2+1}dx$$

$$= \frac{x^3}{3}Log(x^2+1) - \frac{2}{3}\int (x^2-1+\frac{1}{x^2+1})dx$$

$$= \frac{x^3}{3}Log(x^2+1) - \frac{2x^3}{3} + \frac{2}{3}Arc\ tg\ x + c$$

وبشكل عام يمكن أن تستخدم طريقة المكملة بالتجزئة إذا كانت:

* $\int P(x)\, e^{\alpha x}\, dx$ حيث P عبارة عن كثير الحدود و α عدد حقيقي معطى بوضع $P(x) = u$ و $e^{\alpha x}\, dx = dv$ فإننا نحصل على:

$$\int P'(x)\, e^{\alpha x}\, dx$$

إلا أن $P'(x)$ يكون بدرجة أقل من $P(x)$ وباستمرار عملية المكملة فإننا نصل إلى:

$$\int e^{\alpha x} dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} + C$$

* $\int P(x)\, Log\,[g(x)]\, dx$ حيث P عبارة عن كثير الحدود و $g(x)$ دالة لوغارتمية بوضع $Log(x) = u$ و $P(x)\, dx = dv$ فإننا نصل إلى تكامل بسيط أنظر المثال السابق.

3-4- التطبيق الاقتصادي

يحتاج التحليل الاقتصادي أحيانا إلى الدالة الكلية (الأصلية) عندما تكــون دالة التغير الحدي معروفة.

3-4-1- التكلفة الحدية والتكلفة الكلية

يمكن أن نتحصل على التكلفة الكلية (CT) من خلال التكلفة الحدية cmg وهذا بمكاملة التكلفة الحدية كالآتي:

$$CT = \int cmg\, d\varphi$$
$$= CV + CF \qquad (3\text{-}10)$$

حيث CV تكلفة المتغيرات وCF التكلفة الثابتة

3-4-2- الإيراد الحدي والإيراد الكلي

بمكاملة الإيراد الحدي (Rmg) نتحصل على الإيراد الكلي (Rt)

$$Rt = \int Rmg\, d\varphi \qquad (3\text{-}11)$$

مثال:

إذا علمت أن دالة الإيراد الحدي معطاة بالعلاقة التالية:

$$Rmg = 800 - 30x$$

حيث x الكمية المنتجة [أي المباعة].

أوجد دالة الإيراد الكلي عندما يكون هذا الإيراد يساوي 25000 دج عند بــيــع 80 وحدة.

الحــل

$$Rt = \int Rmg + C$$
$$\int (800 - 30x)\, dx$$

$$Rt = 800x - 15x^2 + C$$
$$25000 = 800(80) - 15(80)^2 + C$$
$$C = 57000$$

إذن دالة الإيراد الكلي هي: $Rt = 800\,x - 15x^2 + 57000$

3-4-3- العلاقة بين الإيراد الحدي و الإيراد المتوسط

نفرض أن مؤسسة ما تنفرد بإنتاج سلعة لا مثيل لها في السواق تتمتع بقابلية تامة للتجزئة وأن دالة الطلب على هذه السلعة معطاة بالعلاقة:

$$Q = f(P) \qquad \textbf{(3-12)}$$

حيث Q تمثل الكمية المنتجة من السلعة وP سعر الوحدة منها.

ونعلم من خواص هذه الدالة بأن خطها البياني الممثل لتغيرات الكمية المنتجة الموافقة لتغير السعر ينحدر من الأعلى نحو الأسفل ومن اليسار إلى اليمين يحيث يتناقص الطلب على السلعة كلما أرتفع سعرها، وبعبارة أخرى لدينا دوما $dP / dQ \prec 0$، لدالة الطلب هذه دالة عكسية وحيدة تعطينا قيمة P من أجل كل قيمة Q لتكن $P = f(Q)$ العلاقة التي تحدد هذه الدالة العكسية وخطها البياني ينحدر أيضا من الأعلى نحو الأسفل ومن اليسار إلى اليمين بحيث يتناقص السعر P كلما ازدادت الكمية المنتجة من السلعة المفروضة ويكون لدينا دوما $dP / dQ \prec 0$. ونعلم من جهة أخرى أن الإيراد الكلي RT للمؤسسة معرف بالعلاقة:

$$RT = P \times Q$$

وأن الإيراد الحدي Rmg يكتب:

$$Rmg = \frac{dRt}{dQ} = P + P\frac{dP}{dQ} \qquad (3-13)$$

نلاحظ أن الإيراد الحدي هو دوما أصغر مـــن P لأن dP/dQ فـــي العلاقة (3-13) سالب دوما وأن الخط البياني الذي يمثل تغيرات P عندما تتغير Q يدل نفسه على تغيرات الإيراد المتوسط للمؤسسة بدلالة الكميـــة المنتجة وذلك بسبب أن الإيراد المتوسط للمؤسسة Rm بالعلاقة التالية:

$$Rm = \frac{R}{Q} = P \qquad (3-14)$$

فإذا عرفنا دالة الإيراد المتوسط P أمكن استنتاج RT دالة الإيراد الكلي منه وبالتالي إيجاد دالة الإيراد الحدي عن طريق المعادلة (3-13) وبـــالعكس إذا عرفنا دالة الإيراد الحدي للمؤسسة والمعطـــاة بالعلاقـــة: $Rmg = RT'$ أمكن استنتاج دالة الإيراد المتوسط منه، ذلك لأن دالة الإيراد الكلي RT ما هي إلا الدالة الأصلية لـــ Rmg ويمكن كتابة على الشكل:

$$RT = \int_{0}^{Q} Rmg\, dQ + C \qquad (3-15)$$

ولتحديد قيمة C ثابت التكامل نفرض أن RT تنعدم مـــن أجـــل $Q = 0$

وعليه فإن: $0=0+C$ أي أن العدد الثابت معدوم وينتج عن ذلك:

$$RT = \int_0^Q Rmg\, dQ \qquad (3-16)$$

وبتقسيم الطرفين العلاقة (3-16) على Q نجد:

$$Rm = \frac{RT}{Q} = \frac{1}{Q}\int_0^Q Rmg\, dQ \qquad (3-17)$$

تعطينا العلاقة (3-17) قيمة الإيراد المتوسط إذا علمنا دالة الإيراد الحـــدي للمؤسسة المدروسة.

3-4-4- الاستثمار الصافي وتكوين رأس المال

إذا كانت المؤسسة ترغب في تركيب دالـــة التـــي تـــصور رأس المـــال المؤسسة في علاقته بالزمن كمتغير مستقل، يكفـــي أن يكـــون المعـــدل السنوي لتغير رأسمالها معروف.

$$K(t) = \int I(t)\, dt \qquad (3\text{-}18)$$

حيث: I / الاستثمار الصافي، K رأس المال

مثال

الدالة الآتية $y = 3x^{1/2}$ تبيّن معـــدل الاســـتثمار الـــصافي فـــي إحـــدى المؤسسات (y) كمتغير تابع للزمن (x) بالسنوات.

المطلوب

أوجد رأس المال الذي تكونه المؤسسة بين السنة الأولى والسنة الرابعة.

الحل

[معدل الاستثمار الصافي = معدل التغير السنوي في رأس المال]

$$y = \int_{1}^{4} 3x^{1/2}\, dx$$

$$\left(2x^{3/2}\right)_1^4 = \left(2\times 4^{3/2} - 2\times 1^{3/2}\right) = 14$$

إذن رأس المال الذي تكونه المؤسسة بين السنة الأولى والسنة الرابعة يعادل 14 ملايين دج.

من الأمثلة السابقة يمكن أن نستنتج أن عملية التكامل في التحليل الاقتصادي تسمح لنا بالحصول على الدالة الكلية لكل المتغيرات موضوع الدراسة وهذا بعدما يكون معدل التغير لهذه المتغيرات معروفا. بالإضافة إلى ذلك تسمح عملية التكامل حساب ما يسمى في الاقتصاد بفائض المستهلك وفائض المنتج.

3-4-5- فائض المستهلك

نفرض أن دالة الطلب على سلعة مفروضة لمؤسسة ما معينة بالعلاقة:

$$P = f(Q) \qquad (3-19)$$

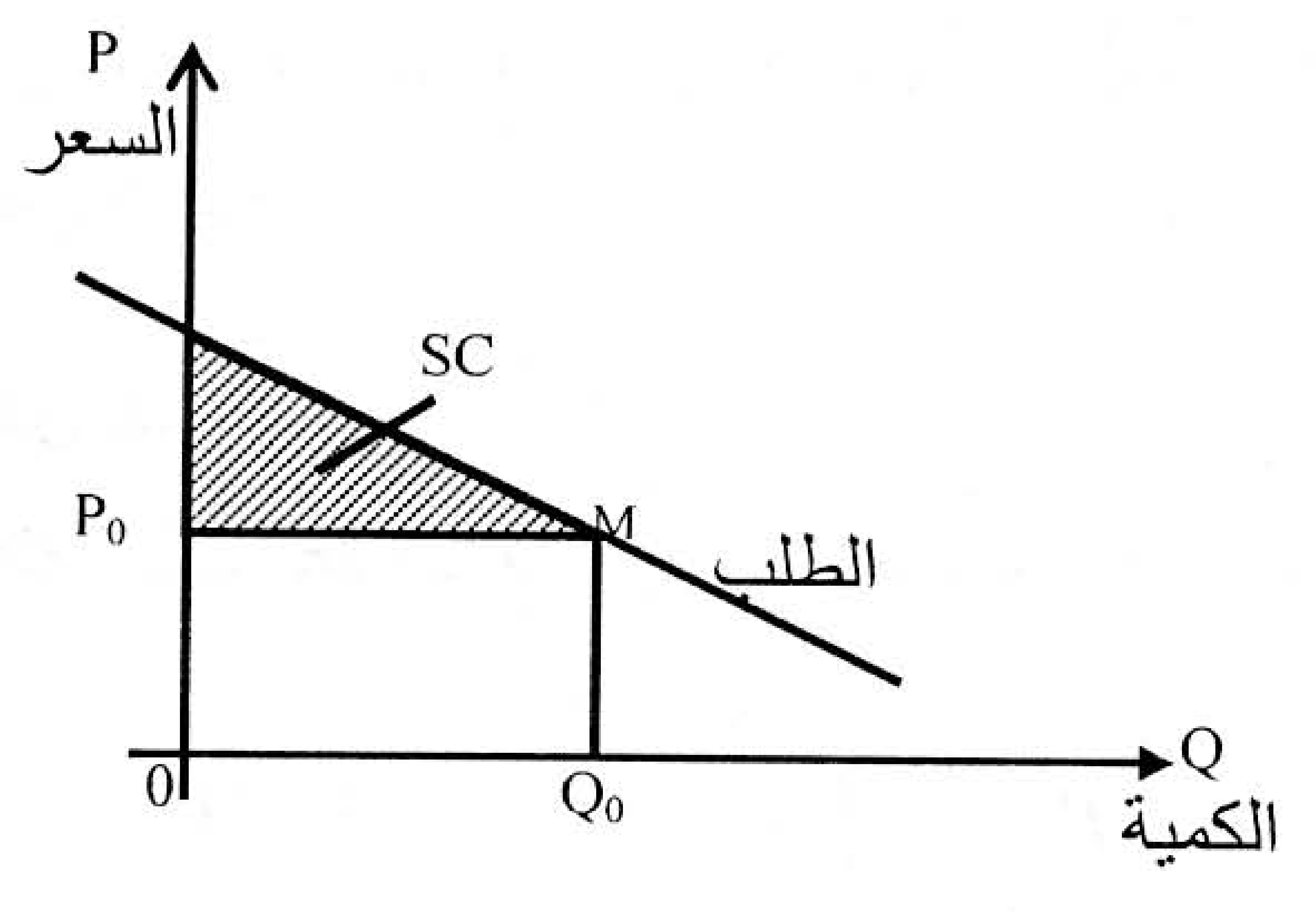
حيث Q كمية طلب المؤسسة من السلعة وP السعر الذي تدفعه المؤسسة للحصول على الكمية Q منها، كما يتم تحديد دالة الطلب داخل المؤسسة بصرف النظر عن الأسعار السائدة في السوق.

لنعتبر أن للسلعة المفروضة قابلية التجزئة وأن منفعة وحدة النقود هي وحدة المنفعة المأخوذة بعين الاعتبار، عند ها يمكن القول أن P هي المنفعة الحدية التي تحصل عليها المؤسسة فيما لو أشترت وحدة إضافية واحدة من السلعة المفروضة بعد حصولها على الكمية Q من السلعة ذاتها.

ليكن P_0 السعر السائد في السوق للسلعة Q_0 كمية منها تحقق العلاقة:

$$P_0 = f(Q_0) \qquad (3-20)$$

فإذا ما أشترت المؤسسة الكمية Q_0 من السلعة المفروضة فسوف تحصل على منفعة كلية تمثل هندسيا في الشكل أدناه بالسطح المحصور بين منحني الطلب ومحور السينات والمستقيمين$Q=0$ و $Q=Q_0$ الموازيين لمحور التراتيب مقابل التخلي عن منفعة تقدر بـ P_0Q_0 وتمثل هندسيا بسطح المستطيل OQ_0MP_0



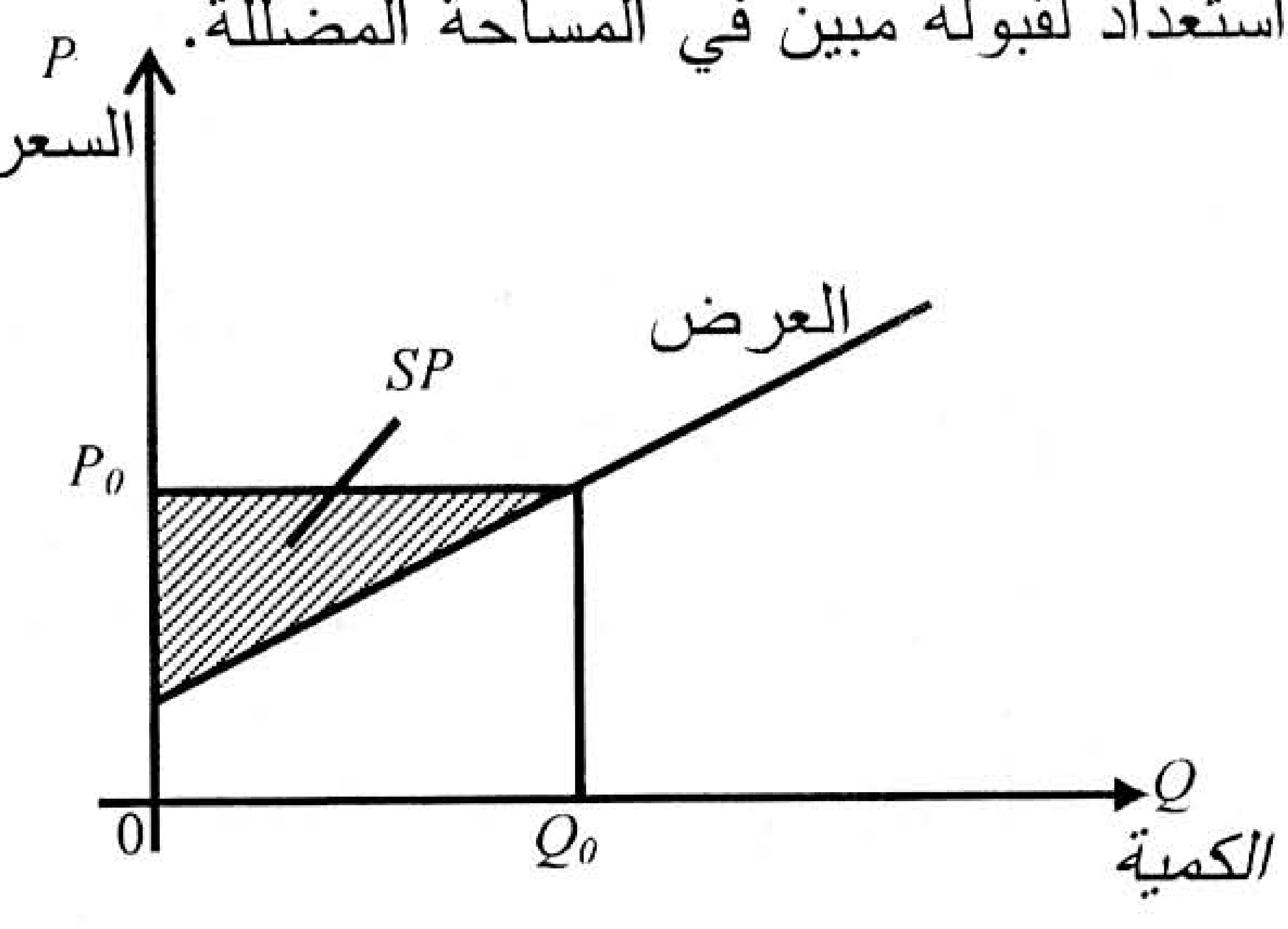
النتيجة تحقق المؤسسة بشرائها الكمية Q_0 من السلعة المفروضة فائضا في المنفعة يدعى " فائض المستهلك " يمثل الفرق بين المنفعة التي تجنيها من حصولها على الكمية Q_0 وبين المنفعة التي تخلت عنها للحصول على الكمية ذاتها من السلعة.و يعبر عنها رياضيا بالعلاقة:

$$SC = \int_0^{Q_0} f(Q)dQ - P_0Q_0 \qquad (3-21)$$

حيث: Q_0 الكمية التوازنية، P_0 السعر التوازني، $f(Q)$ دالة الطلب.

3-4-6- فائض البائعين أو المنتجين

هو الفرق بين ما يحصل عليه فعلا من بيع السلعة وبين السعر الذي يكون على استعداد لقبوله مبين في المساحة المضللة.



إذن:

$$SP = P_0Q_0 - \int_0^{Q_0} f(Q)dQ \qquad (3-22)$$

حيث $f(Q)$ تمثل دالة العرض.

مثال: إذا كان لدينا النموذج التالي:

$$P_D = 16 - Q^2$$
$$P_o = 4 + Q$$

من الناحية الرياضية نلاحظ أن هذا النموذج غير كامل لأن عدد المجاهيل (P_D, P_O, Q) أكبر من عدد المعادلات، فمن الضروري البحث عن المعادلة الثالثة تلك المعادلة تبين حالة توازن النموذج أي بمعنى تحديد السعر (P) التي تكون فيها الكمية المعروضة مساوية للكمية المطلوبة وعلى هذا الأساس تكون المعادلة الثالثة كما يلي: $P_D = P_o$

وهو شرط توازن السوق: $16 - Q^2 = 4 + Q$

بإصلاح المساواة نجد:

$$Q_1 = 3 \qquad Q_2 = -4$$

إذن الكمية التوازنية هي $Q_0 = 3$

السعر التوازني $P = 16 - (3)^2 = 7$

فائض المستهلك $SC = \int_0^3 (16 - Q^2)\, dQ - (7 \times 3)$

$$SC = \left(16Q - Q^3/3\right)_0^3 - 21 = 18$$

فائض المنتج

$$SP = 7 \times 3 - \int_0^3 (4 + Q)\, dQ$$
$$= 21 - \left[4\varphi + Q^2/2\right]_0^3 = 4{,}5$$

تمارين الفصل الثالث

التمرين 1-3

عين التكاملات التالية:

1) $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}}$

2) $I = \int a^{x}\left(1+\frac{a^{-x}}{\sqrt{x^{3}}}\right)dx$

3) $I = \int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$

4) $I = \int \frac{4xdx}{\sqrt{9+4x^{2}}}$

5) $I = \int \frac{x^{5}}{x^{12}+1}dx$

6) $I = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}+1}$

7) $I = \int \frac{dx}{x\log x^{2}}$

8) $I = \int \frac{x^{2}dx}{2-x^{6}}$

9) $I = \int \frac{x^{3}dx}{1+\sqrt[3]{x^{4}+1}}$

10) $I = \int \sqrt{1-e^{-2x}}\,dx$

11) $I = \int \frac{x^3 \, dx}{1 + 3x^8}$

12) $I = \int \frac{\sqrt{\sqrt[3]{x} + 1}}{\sqrt[3]{x^2}} dx$

13) $I = \int \frac{xdx}{\sqrt{\left(a + bx^2\right)^3}}$

14) $I = \int \frac{\sqrt{x}}{2x(1-x)} dx$

15) $I= \int (Log\, x)^2 \, dx$

16) $I = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt{x}}$

17) $I = \int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt[4]{e^x + 1}}$

18) $I = \int 3^{\sqrt{2x+1}} dx$

19) $I = \int \frac{dx}{\sqrt{2x-1} - \sqrt[4]{2x-1}}$

20) $\int \frac{\left(\sqrt{x} - 1\right)^3 dx}{x}$

21) $I= \int \frac{x^7 \, dx}{\left(x^4 - 4\right)^2}$

التمرين 2-3-

إذا علمت أن دالة التكاليف الحدية معطاة بالعلاقة التالية:

$$Cmg = 0,06x^2 - 0,2x + 10$$

وإذا كانت التكاليف الثابتة في المؤسسة تساوي 6000 دج، أوجد دالة التكاليف الكلية، ثم أحسب التكاليف المتوسطة عند إنتاج 240 وحدة.

التمرين 3-3-

يتحمل مشروع نفقة كلية معطاة بالمعادلة التالية:

$$CT = Q^3 - 6Q^2 + 24Q$$

المطلوب:

1- أحسب النفقة المتوسطة و الحدية

2- نفرض أن المشروع يعمل في ظل المنافسة التامة، حيث يتحدد سعر السوق بـــ24 دج، برهن على أن ربح المنتج يمكن أن نعبر عنه بـــ

$$\pi = \int_0^Q (P - Cmg)dQ$$

أو بـــ

$$\pi = Q(P - Cm)$$

التمرين 4- 3

نفترض أن دالة الإنتاج الحدي لعنصر العمل في مؤسسة ما كانت بالشكل التالي:

$$PPmg_L = 60 - 10L$$

وانه عند عدم وجود عمالة إضافية أي عندما $(L = 0)$ كانت قيمة الإنتاج $(Q = 3500)$

المطلوب:

1- حدد قيمة الإنتاج عند إضافة $(L = 20)$

2- حدد حالة مرحلة الإنتاج التي تمربها تلك المؤسسة

التمرين 5-3

إذا كانت دالة الإيراد الحدي لسلعة ما هي:

$$Rmg = 120 - 6Q$$

وأن الإيراد الكلي $RT = 900$ عندما $(Q = 0)$

المطلوب:

أحسب الإيراد الكلي والسعر الذي تباع به السلعة عندما تكون الكميات المنتجة $(Q = 30)$، ثم أحسب التغيرات التي تحدث في السعر والإيراد الكلي عندما يزداد حجم الإنتاج لتلك السلعة بمقدار 10%.

الفصل الرابع

المعادلات التفاضلية



4-1- تعريفها

المعادلة التفاضلية هي علاقة تربط بشكل عام بين المتغير والدالة ومشتقاتها المتتالية مثلا تدعى العلاقة التالية:

$$f(x, y, y', y'', y''', \cdots\cdots, y'^{n}) = 0$$

أو

$$f(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \cdots\cdots, \frac{d^ny}{dx^n}) = 0$$

بمعادلة تفاضلية وهي تربط بين المتغير x والدالة y والمشتقات المتتالية $y', y'', y''', \cdots\cdots, y'^{n}$ لهذه الدالة.

* **الرتبة** Ordre

تنسب رتبة المعادلة التفاضلية إلى رتبة أعلى مشتق في المعادلة مثلا:
معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى إذا كانت على الشكل:

$$f = \left(\frac{dy}{dx}, y, x\right) = 0$$

معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية إذا كانت على الشكل:

$$f = \left(\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{dy}{dx}, y, x\right) = 0$$

معادلة تفاضلية من الرتبة n إذا كانت على الشكل:

$$f = \left(\frac{d^n y}{dx^n}, \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} y, x \right) = 0$$

* **الدرجة** degré

درجة المعادلة التفاضلية تنتسب إلى أعلى قوة (أمن) يكون مرفوعا بها المشتق ذو الرتبة العليا

مثال:

معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى

$$-\frac{dy}{dx} = 5x + 4$$

معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى والدرجة الخامسة

$$-\left(\frac{dy}{dx} \right)^5 - 2x^3 = 0$$

معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية والدرجة الأولى

$$-\frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx} \right)^4 + x^2 = o$$

إذن: إذا رمزنا للمتغير المستقل xو بـــ y للدالة المطلوبة فإن الصيغة العامة للمعادلة التفاضلية العادية تكون:

$$F(x, y, y', y''......y'^n) = 0 \qquad (4-1)$$

وتدعى مرتبة الاشتقاق الكبرى للدالة المجهولة الواردة في هذه المعادلة بمرتبة المعادلة التفاضلية.

4-2 – حل المعادلة التفاضلية

المقصود بحل المعادلة التفاضلية هو إيجاد الدالة $y = f(x)$ التي تحقق هي ومشتقاتها المتتالية المعادلة التفاضلية.

$$f(x, y, y', y'', ...y^{(n)}) = 0$$

وسوف نرى لاحقا أن عملية إيجاد هذه الدالة ليست إلا عملية تكامل بحد ذاتها، حيث نحصل من نتيجة المكاملة على حل لهذه المعادلة متمثلا بالدالة $y = f(x)$ يحوي ثابت تكامل واحد " أو عدة ثوابت كيفية لا على التعيين، عددها يحدد حسب مرتبة المعادلة التفاضلية" وتقابل كل قيمة لهذا الثابت حلا للمعادلة التفاضلية، ونحصل على ما يسمى بالحل الخاص للمعادلة التفاضلية، حينما يتم تحديد قيمة هذه الثابتة.

إذن يمكن القول إن الشرط اللازم والكافي حتى تكون الدالة:

$$y = f(x, c_1, c_2, ...c_n) \qquad (4-2)$$

" حيث x متغير مستقل و y هي الدالة القابلة للاشتقاق

$c_1, c_2, ...c_n$ ثوابت كيفية " حلا للمعادلة التفاضلية:

$$F(x, y, y', y'', ...y^{'n}) = 0 \qquad (4-3)$$

هو أن تتحقق المطابقة التالية:

$$f(x, f(x), f'(x), f''(x),......f^{'(n)}) = 0 \qquad (4-4)$$

وذلك من اجل جميع قيم x المنتمية إلى مجال معين، فإذا أخذنا المعادلة التفاضلية التالية:

$$3x^2 - y' = 0$$

وأردنا التوصل إلى حلها العام لوجدنا أن: $3x^2 = y'$

وبالتكامل نجد أن:

$$\int dy = 3\int x^2 dx$$

$$y = x^3 + C$$

وهو الحل العام لمعادلة التفاضلية المعطاة، وإذا أردنا التحقق من صحة المطابقة (4-4) لوجدنا بالتبديل في المعادلة التفاضلية المعطاة أن:

$$3x^2 - 3x^2 = 0$$

وهي مطابقة صحيحة من أجل جميع قيم x المنتمية إلى مجال معين

ملاحظات

1- إن الدالة $y = f(x)$ التي تحقق المعادلة التفاضلية بحل المعادلة، هذا الحل يدعى الحل العام للمعادلة التفاضلية.

2- وجدنا أن هذا الحل العام يحوي ثابتا أو عدة ثوابت بحسب مرتبة المعادلة التفاضلية، ونحصل على الحل الخاص من الحل العام وذلك بإعطاء قيمة عددية للثابت، وفي بعض الأحيان يدخل في الحل الخاص شروط الابتدائية.

4-3- المعادلات التفاضلية العادية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى

المعادلة التفاضلية العادية من المرتبة الأولى، والدرجة الأولى هي كل معادلة تحوي المتغير المستقل x والدالة y ومشتقها الأول y' فقط، أي لها الشكل العام التالي:

$$f(x, y, y') = 0 \qquad (4-5)$$

وكثيرا ما يكتب هذا الشكل بصيغ أخرى مثل:

$$f(x, y)dx + g(x, y)dy = 0$$

أو

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad (4-6)$$

وعندئذ يكون الحل العام لهذه المعادلة هو: $y = \phi(x)$

إذ لو عوضنا هذا الحل في المعادلة (4-4) لتحققت مطابقة.

لنأخذ أحد الأمثلة والذي يمثل المعادلة التفاضلية العادية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى على النحو التالي:

$$x\,y' - 5y = 0$$

إن حل هذه المعادلة هو:

$$x\frac{dy}{dx} - 5y = 0$$

$$\frac{dy}{y} = 5\frac{dx}{x}$$

بتكامل الطرفين نجد أن:

$$\log y = 5\log x + \log C$$

أي أن:

$$y = C \times x^5$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة. إن أي قيمة للثابت C تعطينا حلا خاصا للمعادلة السابقة نفسها.

4-4- المعادلات التفاضلية العادية من المرتبة الأولى و الدرجة الأولى ذات المتحولات المنفصلة

هي معادلة تفاضلية عادية شكلها العام هو:

$$f(x, y, y') = 0 \qquad (4-7)$$

حيث نلجأ دوما إلى كتابة هذا الشكل على النحو التالي:

$$f(x)dy = g(y)dx$$

أو بالشكل الآخر:

$$\frac{dy}{g(y)} = \frac{dx}{f(x)} \qquad (4-8)$$

نجد الحل العام لهذه المعادلة مباشرة بتكامل الطرفين أي أن:

$$P(y) = Q(x) + C$$

"$P(y)$ ، $Q(x)$ دوال أصلية للدوال $g(y)$ و $f(x)$"

مثال: اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية: $4x^2y' - 3xy = 0$

الحل:

نكتبها بالشكل التالي: $$4\,x^2\frac{dy}{dx} = 3\,x\,y$$

ومنه: $$\frac{dy}{y} = \frac{3}{4}\frac{dx}{x}$$

بتكامل الطرفين نجد أن: $$\log y = \log x^{3/4} + \log C$$

ومنه: $$y = C \times \sqrt[4]{x^3}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة.

للتأكد من أن $y = C \times \sqrt[4]{x^3}$ هو الحل العام للمعادلة التفاضلية، نعوض في المعادلة التفاضلية المفروضة نجد أن:

$$4x^2 \times \frac{3}{4} C x^{-\frac{1}{4}} - 3x C x^{\frac{3}{4}} = 0$$

وبالاختصار: $$x.x^{-\frac{1}{4}} - x^{\frac{3}{4}} \equiv 0$$

وهي مطابقة صحيحة محققة مهما تكن قيمة x .

مثال:

اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية:

$$(1-e^{x})dy=\frac{e^{x}}{y}dx$$

$$ydy=\frac{e^{x}}{1+e^{x}}dx$$

باعتبار y دالة و x متغير

$$\int y\,dy=\int\frac{e^{x}}{1+e^{x}}dx$$

$$y^2=2\log\left|1+e^{x}\right|+2k$$

مثال:

أوجد الحل للمعادلة التفاضلية التالية:

$$\sqrt{y^2+1}\;dx=x\,y\,dy$$

بجعل x تابع y متحول مستقل

$$\int\frac{dx}{x}=\int\frac{y\,dy}{\sqrt{y^2+1}}$$

$$\log|x|+C_1=\sqrt{y^2+1}+C_2$$

$$x=\ell^{\sqrt{y^2+1}}\times A$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة

4-5- المعادلة التفاضلية العادية من المرتبة الأولى والمتجانسة

تكون الدالة $f(x,y)$ متجانسة من الدرجة n إذا كان:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n \times f(x,y) \qquad (4-9)$$

حيث λ عدد ما.

نقول عن المعادلة التفاضلية العادية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = f(x,y) \qquad (4-10)$$

إنها معادلة تفاضلية متجانسة إذا أمكن كتابتها بالشكل التالي:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \left(\frac{y}{x}\right) \qquad (4-11)$$

حيث $x \neq 0$

إن حل المعادلة التفاضلية المتجانسة يكون بفرض $z = y/x$ حيث يكون

$$y = zx$$

بتفاضل الطرفين:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}x + z$$

وعند التعويض في المعادلة المتجانسة نجد أن:

$$x\frac{dz}{dx} + z = f(z)$$

أي أن:

$$f(z) - z = x\frac{dz}{dx}$$

ومنه:

$$\frac{dz}{f(z)-z} = \frac{dx}{x}$$

بتكامل الطرفين نحصل على:

$$g(z) = \log x + C \qquad (4-12)$$

حيث: $g(z)$ هي دالة أصلية للدالة $\frac{1}{f(z)-z}$

نعوض الآن قيمة z نحصل على الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة المفروضة:

$$g\left(\frac{y}{x}\right) = \log x + C \qquad (4-13)$$

مثال:

حل المعادلة التفاضلية التالية

$$x^2 y' = xy - y^2 \qquad (1)$$

نقسم (1) على x^2 نجد:

$$y' = \frac{x\,y}{x^2} - \frac{y^2}{x^2}$$

$$y' = \frac{x}{y} - \left(\frac{y}{x}\right)^2 \qquad (2)$$

هذه معادلة تفاضلية متجانسة لأنها من الشكل $x \neq 0$ ،

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

إذن نعوض عن الدالة (y) بدالة جديدة z

$$z = \frac{y}{x} \Rightarrow y = z\,x$$

$$y' = z'x + z$$

نعوض عن $\left(\mathrm{y}', \frac{y}{x}\right)$ في (2) نجد:

$$z'x + z = z - z^2$$

$$\frac{dz}{dx}x = -z^2$$

نفصل المتغيرات نجد

$$\frac{x}{dx} = -\frac{z^2}{dz}$$

بالمكملة نجد

$$\int\frac{dx}{x} = -\int\frac{dz}{z^2}$$

$$\log|x| + C_1 = +\frac{1}{z} + C_2$$

$$\frac{1}{z} = \log|x| + k$$

حيث $k = (C_1 + C_2)$

$$z = \frac{1}{\log|x| + k}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{\log|x| + k} \Rightarrow y = \frac{x}{\log|x| + k}$$

العلاقة الأخيرة تبين الحل العام للمعادلة المفروضة

4-6- المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الأولى

نقول عن المعادلة التفاضلية إنها خطية إذا كان كل حد من حدودها هو من الدرجة صفر، "أو من الدرجة الأولى"بالنسبة لكل من:

$$y, y', y''', \ldots, y'^{n} \qquad (4\text{-}14)$$

ونستطيع أن نتعرف على المعادلة التفاضلية، فيما إذا كانت خطية أم لا، وذلك بأن نحسب درجة كل حد من حدودها وهذا بجمع قوة التحول غير المستقل ومشتقاته في كل حد من هذه الحدود.

إن الشكل العام للمعادلات التفاضلية الخطية ذات المرتبة الأولى هو:

$$f(x)\frac{dy}{dx} + g(x)\,y = h(x) \qquad (4-15)$$

حيث $h(x), g(x), f(x)$ دوال كيفية للمتغير x " مستمرة طبعا "

ونقول عن $h(x)$ إنه الطرف الثاني للمعادلة. إذا كان $h(x)$ مساويا الصفر نقول إن المعادلة بلا طرف ثان، " أو هي معادة خطية متجانسة".

لحل المعادلة التفاضلية نبدأ بالحالة الخاصة وذلك عندما تكون المعادلة بدون طرف ثان، أي من الشكل:

$$f(x)\frac{dy}{dx} + g(x)\,y = 0 \qquad (4-16)$$

وهي معادلة ذات متحولات منفصلة حلها العام هو:

$$\int \frac{g(x)}{f(x)}dx + \int \frac{dy}{y} = C_1 \qquad (4-17)$$

وإذا فرضنا أن:

$$F(x) = \int \frac{g(x)}{f(x)}dx$$

لوجدنا أن:

$$y = \lambda e^{-F(x)} \qquad (4-18)$$

"λ ثابت اختياري.

أما حل المعادلة بالحالة العامة وذلك عندما $h \neq 0$ فإننا نحاول أن نضعها بشكل معادلة خطية بدون طرف ثاني وذلك من خلال التحويل التالي:

$$y = u(x)v(x) \qquad (4-19)$$

ومنه:

$$y' = u'v + v'u$$

وعند التعويض في المعادلة التفاضلية الأصلية، نجد أن:

$$[u' f(x) + u\, g(x)]v + v' f(x) = h(x) \qquad (4-20)$$

لنختزل الدالة $u(x)$ بحيث يكون: $u' f(x) + u\, g(x) = 0$

وهذا معناه أن $u(x)$ حل خاص للمعادلة التفاضلية الأصلية بلا طرف ثان " أي حينما نجعل طرفها الثاني معدوما" يبقى لدينا:

$$v'u\, f(x) = h(x) \qquad (4-21)$$

ومنه:

$$v = \int \frac{h(x)}{u\, f(x)} dx$$

أي أن الحل العام للمعادلة التفاضلية المفروضة هو:

$$y = u(x)\, v(x) = u(x) \int \frac{h(x)}{u\, f(x)} dx + c\, u(x) \qquad (4-22)$$

إذن لحل المعادلة التفاضلية الخطية بطرف ثان نتبع الخطوات التالية:

1- نحل المعادلة أولا بدون طرف ثان، فنجد أن $y = \lambda\, e^{-F(x)}$

2- نعتبر أن λ تابع لـــ x "أي نحول الثابت"، وذلك أن $u = e^{-F(x)}$ حل خاص للمعادلة بدون طرف ثان".

3- نحسب $\lambda(x)$ من المعادلة التفاضلية بطرف ثان.

4- نعوض عن قيمة $\lambda(x)$ في $u(x) = \lambda(x) e^{-F(x)}$ فنجد الحل العام للمعادلة بطرف ثاني.

مثال:

حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$y' - \frac{1}{x \log x}\, y = x \log x$$

هذه المعادلة تفاضلية خطية من المرتبة الأولى لأنها من الشكل التالي:

$$y' + a(x)y = b(x)$$

* الحل بدون طرف ثاني [بدون طرف الحر]، تصبح المعادلة

$$y' - \frac{1}{x\log x}\ y = 0$$

بفصل المتغيرات نجد:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\log x}y$$

$$\int\frac{dy}{y} = \int\frac{dx}{x\log x}$$

بالمكملة نجد:

$$\log|y| + C_1 = \log|\log(x)| + C_2$$

$$y = A \times \log(x)$$

2- حل بطرف ثاني: أي بمكملة المعادلة بجعل A ليس ثابتا بل دالة للمتغير x و بالاشتقاق نجد:

$$y' = A'\log x + \frac{A}{x}$$

نعوض عن y و y' في المعادلة التفاضلية نجد:

$$A'\log x + \frac{A}{x} - \frac{1}{x\log x}.A\log x = x\log x$$

$$A'\log x = x\log x$$

$$A' = x$$

بالمكملة نجد:

$$\frac{dA}{dx} = x$$

$$\int dA = \int x\,dx$$

$$A + C_3 = \frac{x^2}{2} + C_4$$

وعند التعويض عن A في الحل بدون طرف الثاني نحصل على:

$$y = \left(\frac{x^2}{2} + k\right)\log x$$

4-7- معادلة برنولي

نقول عن المعادلة التفاضلية ذات الشكل التالي:

$$\frac{dy}{dx} + f(x)\,y = g(x)\,y^n \qquad (4-23)$$

إنها معادلة برنولي "حيث n عدد حقيقي كيفي لا على التعيين".

فإذا كانت $n=0$ تحول معادلة برنولي إلى المعادلة الخطية بطرف ثاني وإن كانت $n=1$ تحول معادلة برنولي إلى المعادلة تفاضلية ذات متغيرات منفصلة.

لذا حتى نستطيع دراسة معادلة برنولي والتعرف على حلها، سنفرض أن $n \neq 1$ و $n \neq 0$ ثم نجري عليها تحويلا، وذلك بقسمة طرفيها على y^{+n} نحصل من خلاله على معادلة تفاضلية خطية، أي أن:

$$\frac{1}{y^n}\frac{dy}{dx}+f(x)\frac{1}{y^{n-1}}=g(x) \qquad (4-24)$$

ثم ندخل دالة جديدة هي:

$$z=\frac{1}{y^{n-1}}=y^{-n+1}=y^{1-n}$$

$$z'_x=\frac{dz}{dx}=(-n+1)\,y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

وعند التعويض في معادلة برنولي نجد أن:

$$\frac{z'}{1-n}+f(x)z=g(x) \qquad (4-25)$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الأولى بطرف ثان، وقد تعرفنا على كيفية حلها.

مثال: حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$x^2y'-x\,y+y^3=0 \qquad (1)$$

نقسم الطرفي المعادلة (1) على x^2 نجد:

$$y'-\frac{1}{x}y=-\frac{1}{x^2}y^3 \qquad (2)$$

نلاحظ أن المعادلة (2) معادلة تفاضلية برنولية لأنها من الشكل:

$$y'+a(x)y=b(x)y^n$$

تحول إلى معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الأولى بقسمة طرفي المعادلة (2) على (y^3) نجد:

$$\frac{y'}{y^3}-\frac{1}{x}\frac{y}{y^3}=-\frac{1}{x^2}\frac{y^3}{y^3}$$

$$y'y^{-3}-\frac{1}{x}y^2=-\frac{1}{x^2} \qquad (3)$$

نضع $z=y^{-2}$ إذن:

$$z'=-2y^{-3}y'$$

$$y'=\frac{z'}{-2y^{-3}}$$

نعوض عن $(y^{-2}$ و $y')$ في (3) ينتج

$$\frac{z'}{-2y^{-3}}y^{-3}-\frac{1}{x}z=-\frac{1}{x^2}$$

$$z'+\frac{2}{x}z=\frac{2}{x^2} \qquad (4)$$

أصبحت المعادلة (4) معادلة خطية من المرتبة الأولى بطرف ثان وعند حلها نحصل على:

$$y=\frac{1}{\sqrt{\frac{2x+\beta}{x^2}}}=\frac{x}{\sqrt{2x+\beta}}$$

وهو الحل العام لمعادلة برلوني المعطاة

4-8-التطبيق الاقتصادي

تقوم النماذج الاقتصادية على الفرضيات تنسجم غالبا مع طبيعة الحياة الاقتصادية التي نعيشها وتكون ترجمة هذه الفرضيات رياضيا على الأغلب بشكل علاقات تربط بين المتغيرات الاقتصادية المأخوذة بعين الاعتبار فإذا ما حوت هذه العلاقات مشتقات لبعض المتغيرات كان لدينا معادلات تفاضلية بحيث تكشف لنا حلولها طبيعة التغيرات التي تتميز بها النماذج المقترحة كما توضح فيما إذا كانت تميل إلى التوازن عند نقطة معينة أم لا؟ خاصة إذا تتعلق الأمر بالنماذج الحركية ذات البعد الزمني بصورة مستمرة، بمعنى أن متغيرات النموذج تتغير من خطة لأخرى خلال الزمن وليس على أساس عدد محدود من القفزات، حيث أن كل قيمة في النموذج تنسب إلى لحظة معينة من الزمن.

4-8-1- نموذج دومار

يعتنى هذا النموذج بالكيفية التي يصل إليها التوازن في الطلب الكلي وفي الطاقة الإنتاجية للاقتصاد، وهذه الكيفية هي تحديد المسار الزمني المطلوب تواجده عند وجود شرط توازني معين. و يقوم هذا نموذج على الفرضيات الآتية:

-1- اعتبار $K(t)$ رأس المال المستخدم في بلد معين في اللحظة (t) دالة مستمرة بالنسبة للزمن (t) وقابلة للاشتقاق على مجال تغيره، فإذا رمزنا بـــ $I(t)$ للمعدل السنوي للأموال المستثمرة في اللحظة (t) يكون لدينا

$$I(t) = \frac{dK(t)}{dt} \qquad (4-26)$$

ونرمز بـــ $Y(t)$ لكمية الطلب الكلي السنوي في اللحظة (t) ونفرض أيضا Y كدالة بالنسبة لـــ (t) وقابلة للاشتقاق على مجال تغيره.
إذن وفق هذه الشروط تعبر الفرضية الأولى في نموذج دومار عن أن التغير في المعدل السنوي للأموال المستثمرة يؤثر على الطلب الكلي وفق العلاقة التالية:

$$\frac{dI}{dt}=\frac{dY}{dt}S \qquad (4-27)$$

حيث S مقدارا ثابتا (بالنسبة للزمن) يعبر عن النزعة الحدية للادخار.

-2- أن نسبة الطاقة في البلد إلى رأس المال المستخدم تبقى ثابتة خلال الزمن، وبتعبير آخر لدينا بموجب هذا النموذج:

$$\frac{E}{K}=P \qquad (4-28)$$

حيث نرمز بـــ E للطاقة الإنتاجية وهي دالة للزمن وبـــ P لكمية [ثابتة] لا تتعلق بالزمن وهي تمثل نسبة الطاقة إلى رأس المال.

-3- يفترض في نموذج دومار أن الطاقة الإنتاجية مستقلة استقلالا كاملا، بحيث تتم المساواة في حالة التوازن بين الطلب الكلي والطاقة الإنتاجية أي بمعنى أن شرط التوازن هو تساوي الطلب الكلي مع حجم الإنتاج الذي يمكن إنتاجه خلال السنة أي $(Y=E)$، وعلى هذا الأساس يكون لدينا:

$$\frac{dY}{dt}=\frac{dE}{dt} \qquad (4-29)$$

وبمقارنة العلاقتين (4-28) و (4-29) نستنتج أن:

$$\frac{dY}{dt} = P\,\frac{dK}{dt}$$
$$= P.I$$

وبتعويض (dY / dt) بقيمتها في العلاقة (4-27) نحصل على المعادلة التفاضلية التالية:

$$\frac{dI}{dt} = P.S.I \qquad (4-30)$$

العلاقة (4-30) تمثل معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى حيث S النزعة الحدية للادخار وP نسبة الطاقة الإنتاجية إلى رأس المال المستخدم وهي ثوابت موجبة، أما t وI فتمثلان على الترتيب الزمن والمعدل السنوي للأموال المستثمرة في اللحظة t ولذلك فإن العلاقة (4-30) هي عبارة عن معادلة تفاضلية ذات المتحولات المتفرقة ويمكن أن تكتب بالشكل التالي:

$$\frac{dI}{I} = P.S\,.dt \qquad (4-31)$$

وبمكاملة الطرفين نحصل على:

$$\int \frac{dI}{I} = P.S \int dt$$
$$Log\,|I| + C_1 = P.S.t + C_2$$
$$Log\,|I| = P.S.t + k$$

$$I = e^{P.S\,t+k} = A.e^{P.S.t} \qquad (4-32)$$

إذن إذا تحققت شروط دومار المذكورة أعلاه فإن المعدل السنوي للأموال المستثمرة ينمو عبر الزمن بشكل تصاعدي وفق العلاقة (4-32).

استنتاج

حتى يتحقق شرط التوازن $\left[\frac{dY}{dt}=\frac{dE}{dt}\right]$ على مدى الزمن فإن الشرط الذي وضعه دومار هو أن معدل التدفق الاستثماري $I(t)$ يجب أن ينمو بمعدل أوسي $[P\ S\ t]$ [أي مقدار يساوي نسبة الطاقة إلى رأس المال مضروب في الميل الحدي للادخار] وهذا يعني أنه كلما زاد معدل النمو الاستثماري كلما كبرت نسبة الطاقة / رأس المال وكذلك الميل الحدي للادخار.

ولتحديد الثابت A للعلاقة (4-32) نضع $t=0$ فيكون $I(0)=e$ وهذا يعني أن A أو $(I, 0)$ ما هو إلاّ المعدل الابتدائي (في بدء الزمن) السنوي للأموال المستثمرة، ومنه نستنتج ما يلي:

$$I = I(0)\,e^{PSt} \qquad (4-33)$$

وبالإضافة إلى ذلك فقد مثل دومار العلاقة بين الدخل القومي والدين العام في نماذج عديدة حتى يمكن التصور إلى ما يؤول إليه حجم الدين العام بمرور الزمن في الحالات المختلفة من أجل إتخاد الإجراءات الاقتصادية المناسبة للحد من مشكلة الدين العام و التوصل إلى الحل المناسب.

أ- النموذج الأول

المعادلات الهيكلية هي:

$$\frac{dD}{dt} = \alpha R(t) \qquad (4-34)$$

$$\frac{dR}{dt} = \beta \qquad (4-35)$$

حيث $\beta \succ 0$ $\quad \alpha \succ 0 \quad D(0) = D_0 \quad R(0) = R_0$

وتمثل D حجم الدين العام، R الدخل الوطني الذي ينمو في هذا النموذج بمعدل ثابت β بمرور الزمن وكلاهما متغيران داخليان.

من المعادلة (4-35) نجد أن: $\quad dR = \beta\, dt$

بالمكملة نجد: $\quad \int dR = \int \beta\, dt$

إذن: $\quad R = \beta t + C$

وحيث $R(0) = R_0$ فإن $C = R_0$ و منها $R = \beta t + R_0$

وعند التعويض عن R في المعادلة (4-34) نجد:

$$\frac{dR}{dt} = \alpha\beta\ t + \alpha\ R_0$$

$$dR = (\alpha\beta\, t + \alpha\, R_0)dt$$

وبالمكملة نجد:

$$\int dR = \alpha\, \beta \int t\, dt + \alpha\, R_0 t + k$$

وحيث $D(0) = D_0$ فإن $D_0 = k$

إذن:

$$D = \frac{\alpha \beta}{2} t^2 + \alpha R_0 t + D_0 \qquad (4-36)$$

وبما أن الهدف من هذا النموذج هو دراسة ما يمكن أن يؤول إليه الحجم النسبي للدين العام $\frac{D}{R}$ بمرور الزمن $t \to \infty$ فإن:

$$\frac{D}{R} = \frac{\frac{1}{2}\alpha\beta t^2}{\beta t + R_0} + \frac{\alpha R_0 t}{\beta t + R_0} + \frac{\Delta_0}{\beta t + R_0}$$

وعندما $t \to \infty$

$$\lim_{t \to \infty} \frac{D}{R} = \infty + \frac{\alpha R_0}{\beta} + 0 \qquad (4-37)$$

وهذا يعني أن نسبة الدين العام إلى الدخل القومي ستزداد بلا حدود بمرور الزمن

ب- النموذج الثاني

المعادلات الهيكلية هي:

$$\frac{dD}{dt} = \alpha R(t) \qquad (4-38)$$

$$\frac{dR}{dt} = \beta R(t) \qquad (4-39)$$

حيث $R(o) = R_0$ ، $D(o) = D_0$ ، $0 \langle \alpha$ ، $0 \langle \beta$

حل النموذج

من المعادلة (4-39) نجد أن:

$$\frac{dR}{R} = \beta \, dt$$

وبالمكملة نحصل على:

$$R = Ce^{\beta t} \qquad (4-40)$$

وبما أن $R(0) = R_0$ فإن $R_0 = C$

أي تصبح المعادلة (4-40)

$$R = R_0 \, e^{\beta t} \qquad (4-41)$$

وعند تعويض عن (4-41) في (4-38) نجد:

$$\frac{dD}{dt} = \alpha \, R_0 e^{\beta t} \qquad (4-42)$$

بفصل المتغيرات وإجراء عملية التكامل نجد:

$$\int dD = \alpha \, R_0 \int e^{\beta t} dt$$

إذن:

$$D = \frac{\alpha}{\beta} R_0 e^{\beta t} + k \qquad (4-43)$$

وبما أن $D(0) = D_0$ فإن $D_0 = k$

$$D = \frac{\alpha}{\beta} R_0 \, e^{\beta t} + D_0 \qquad (4-44)$$

نحسب الآن $\frac{D}{R}$ نجد أن:

$$\frac{D}{R}=\frac{D_0}{R_0 e^{\beta t}}+\frac{\alpha}{\beta e^{\beta t}}\left[e^{\beta t}-1\right]$$

$$\frac{D}{R}=\frac{D_0}{R_0 e^{\beta t}}+\frac{\alpha}{\beta}\left[1-\frac{1}{e^{\beta t}}\right]$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{D}{R}=0+\frac{\alpha}{\beta} \qquad (4-45)$$

هذا يدل أن نسبة الدين العام إلى الدخل القومي ستؤول إلى ثابت محدود $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$ بمرور الزمن.

4-8-2- الاستثمار و تكوين رأس المال

إن عملية تحقيق إضافات إلى حجم معين من الموجود الرأسمالي تسمى التكوين الرأسمالي Formation du capital وهذه العملية مستمرة مع الزمن.

لذلك يمكن اعتبار الموجود الرأسمالي [التراكم] دالة في الزمن $K(t)$ والمشتقة $\frac{dK}{dt}$ تشير إلى معدل التكوين الرأسمالي. كما أن معدل التكوين الرأسمالي لزمن معين (t) يتطابق مع معدل تدفق الاستثمار الصافي للزمن (t) ويرمز له بـ $I(t)$. ولذلك فإن الموجود الرأسمالي (K) والاستثمار الصافي (I) يرتبطان وفق الصيغة التالية:

$$\frac{dK}{dt}=I(t) \qquad (4-46)$$

ومن العلاقة (4-46) يتضح أنها معادلة تفاضلية ذات المتغيرات المنفصلة وعلى أساس ذلك يمكن صياغة التكامل التالي:

$$K(t) = \int I(t)dt = \int dK \qquad (4-47)$$

كما يمكن أن نعبر عن كمية التكوين الرأسمالي خلال المدة *(0, t)* والتي تسمى التراكم الرأسمالي من خلال تكامل الاستثمار *I(t)* بصيغة التكامل المحدد كما يلي:

$$K(t) = \int_0^t I(t)dt = \left[K(t)\right]_0^t = K(t) - K(0) \qquad (4-48)$$

ويمكن من العلاقة (4-48) أن نستخرج المسار الزمني لـ *K(t)* كما يلي:

$$K(t) = K(0) + \int_0^t I(t)dt \qquad (4-49)$$

من العلاقة (4-49) يمكن أن نستنتج أن *K(t)* والتي تمثل التراكم الرأسمالي عند أي نقطة من الزمن *(t)* هي عبارة عن كمية رأس المال الأصلية *K(0)* مضافا إليها إجمالي التكوين الذي يحدث خلال الزمن (t).

4-8-3-المنحنى المنطقي

يعتبر المنحنى المنطقي من المنحنيات الشهيرة في الاقتصاد وهو نموذج خاص للمنحنيات التي تعبر هندسيا عن تطور كمية اقتصادية ما على مر الزمن، فمثلا يفترض أن مؤسسة بدأت بإنتاج سلعة لا مثيل لها

في الأسواق أن التوسع في إنتاج هذه السلعة بقدر ما يكون هنالك دافع إلى زيادة الإنتاج غير أنه لا يمكن الاندفاع في زيادة الإنتاج للمستقبل إلى ما لا نهاية إذ أن معدل التزايد في كمية الإنتاج يبدأ اعتبارا من لحظة معينة بالتضاؤل أكثر فأكثر كلما اقتربت الكمية المنتجة من الساعة من مستوى الإشباع في السوق وعلى هذا الأساس إذا رمزنا بـــ X للكمية المنتجة وبـــt للزمن فيمكن أن نقول أن معدل تزايد الإنتاج في وحدة الزمن يتناسب طردا مع كل من X حجم الإنتاج و(n-X) المسافة الواقعة بين X حجم الإنتاج

و n مستوى الإشباع ويعبر عن هذا التناسب بالعلاقة:

$$\frac{dX}{dt} = a\,X(n - X) \qquad (4-50)$$

حيث a ثابت موجب وn مؤشر خارجي لا يتعلق بـــX لذا نعتبره كمية ثابتة موجبة.

يتضح من العلاقة (4-50) أنها معادلة تفاضلية ذات المتحولات المتفرقة ولحلها أي إيجاد قيمة X بدلالة الزمن نقسم طرفي العلاقة الأخيرة على $a\,X(n-X)$ ونضرب الطرفين بـــdt نحصل على:

$$\frac{dX}{a\,X(n - X)} = dt \qquad (4-51)$$

ندخل رمز التكامل على العلاقة الأخيرة

$$\int dt = \int \frac{dX}{a\,X(n - X)}$$

ولحسابه نطبق طريقة تفريق الكسور على الطرف الثاني $\frac{dX}{X(n-X)}$

إلى مجموع كسرين من الشكل التالي:

$$\frac{1}{X(n-X)}=\frac{A}{X}+\frac{B}{n-X}$$

بتوحيد المخارج ثم المطابقة بين الحدود المتقابلة في الطرفين نجد:

$$\frac{1}{X(n-X)}=\frac{1/n}{X}+\frac{1/n}{n-X}$$

ومنه:

$$\int dt=\int\frac{dX}{aX(n-X)}$$

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{an}\left[\int\frac{dX}{X}+\int\frac{dX}{n-X}\right] \\ &= \frac{1}{an}\left[\log X-\log(n-X)\right]+K \\ &= \frac{1}{an}\log\frac{X}{n-X}+K \end{aligned}$$

حيث K ثابت التكامل وبوضع:

$$K=(1/an)\log b$$

وبإعتبار b ثابت آخر موجب يكون لدينا:

$$t = \frac{1}{an}\log\frac{X}{n-X} + \frac{1}{an}\log b$$

$$= \frac{1}{an}\left(\log\frac{X}{n-X} + \log b\right) = \frac{1}{an}\log\left(b \times \frac{X}{n-X}\right)$$

نستنتج من ذلك أن:

$$a\,n\,t = \log b\frac{X}{n-X}$$

وهذا يعني أن:

$$\ell^{ant} = b\frac{X}{n-X} \qquad (4-52)$$

ومن العلاقة الأخيرة نجد:

$$X = \frac{n}{1 + b\ell^{-a\,n\,t}} \qquad (4-53)$$

وبفرض أن $C = a\,n$ وهي كمية ثابتة موجبة تكتب العلاقة الأخيرة بالشكل التالي:

$$X = \frac{n}{1 + b\ell^{-C\,t}} \qquad (4-54)$$

حيث ترمز كل من n و b و C إلى كميات ثابتة موجبة كما تعطينا العلاقة الأخيرة كمية الإنتاج في أية لحظة من لحظات الزمن،

تمارين الفصل الرابع

التمرين 4-1

حل المعادلات التفاضلية التالية

1) $2x(1-x)dy=(1-y)dx$

2) $y'=\dfrac{4}{x}y+x\sqrt{y}$

3) $e^{2x-y}dx+e^{x+y}dy=0$

4) $y'(x+y)-y=0$

5) $(x-1)dy-(y+y^2)dx=0$

6) $(2x+y)dx-(4x-y)dy=0$

7) $y\,dx+(2\sqrt{xy}-x)\,dy=0$

8) $xy'+y-y^2\log x=0$

9) $xy'y+x^2y^2-x^2y^4=0$

10) $(y^4+2x)dy=ydx$

11) $y'-x\,y+y^3e^{-x2}=0$

12) $y'(2x^2+x\,y)=x\,y+y^2$

التمرين 4-2

لنفرض أن المعدل الحدي لإحلال السلعة y محل الساعة x معطى بالعلاقة التالية:

$$R=\frac{\alpha}{\beta}\,\frac{y+b}{x+a}$$

حيث a , b , α , β ثوابت، x الكمية المستهلكة من السلعة X و y الكمية المستهلكة من Y والمطلوب إثبات أن دالة المنفعة لدى المستهلك معطاة بالعلاقة التالية:

$$U = (x+a)^{\alpha}(y+b)^{\beta}$$

التمرين 3-4

لنفرض أن دالة الإنتاج لمؤسسة ما معينة بالعلاقة التالية:

$$Q = f(P)$$

حيث Q الكمية المنتجة و P سعر السلعة، والمطلوب تعيين هذه الدالة علما بأن مرونة الطلب على السلعة بالنسبة لسعرها تساوي $(a-bP)$ حيث a و b ثوابت

-التمرين 4-4

نعتبر النموذج التالي:

$$C(t) = (1-s)Y(t) \qquad s \in \left]0\,,1\right[$$

$$K(t) = kY(t) \qquad k \in IR_{+}^{*}$$

$$I(t) = \frac{dK}{dt} + \mu K(t) \qquad \mu \in IR_{+}$$

حيث تمثل كل من $Y(t)$، $I(t)$ و $K(t)$ على التوالي تدفقات من الإنتاج، الاستثمار، الاستهلاك والمخزون من رأس المال في اللحظة (t)

المطلوب:

1- أكتب معادلة التوازن لهذا النموذج ثم أدرس تطوراته

2- نفترض أن الدولة تدخلت بحيث أصبحت المعادلة الأخيرة للنموذج بالشكل التالي:

$$I(t) = \frac{dK}{dt} + \mu K(t) + A\ell^{\alpha t}$$

حيث $A \subset IR$ $\alpha \in IR_+^*$

أدرس تطور $Y(t)$ في حالة

$s = 0,2$ $k = 3$ $\mu = 0,1$



الفصل الخامس

معادلات الفروق المنتهية

5-1- المعادلات الفرقبة

5-2- تعريف الفرق

5-3- تعريف المعادلة الفرقية

5-4- رتبة المعادلة الفرقية

5-5- المعادلة الفرقية المتجانسة من المرتبة الأولى

5-6- لمعادلة الفرقية من الشكل $y_{t+1} + ay_t = c(t)$

5-7- المسار الزمني

5-8- أنماط الإتجاهات الزمنية

5-9- تطبيق اقتصادي

التمارين



في الواقع هناك بعض المتغيرات الاقتصادية من الصعب اعتبار معدلات تغيرها دوال مستمرة بالنسبة للزمن، حيث أن بياناتها وإحصائياتها قد تتوفر لفترات زمنية متقطعة ومنفصلة أو الوثابة مثلا قد تتوفر إحصائيات إجمالي الدخل الوطني لكل سنة وقد تتوفر الإحصائيات النقدية للجهاز المصرفي لكل شهر، كذلك يمكن أحيانا أن نفكر في وجود فجوة زمنية بين متغير اقتصادي معين ومتغير اقتصادي آخر يؤثر فيه مثلا: التفكير في حجم الاستثمارات في فترة زمنية معينة يتوقف على حجم الدخل في فترة زمنية سابقة وفي هذه الحالة من الأنسب التعبير عن علاقات بين المتغيرات المختلفة باستخدام الفروق بدلا من المعادلات التفاضلية ومن الواضح فإن:

$$\lim_{\Delta t \to 0} EDF = ED$$

أي كلما قصرت الفترة الزمنية فإن معدلات الفروق المنتهية (EDF) تقترب تدريجيا لتصبح معادلات تفاضلية (ED).

تأسيسا على ما تقدم فإن معادلة الفرق توضح العلاقة بين المتغير التابع والمتغير أو المتغيرات المستقلة المتباطئة زمنيا والتي تتغير عند المديات الزمنية الوثابة [غير مستمرة] مع العلم أنه لا نغير من طبيعة التحليل الحركي، لأن الاهتمام يهدف إلى التوصل إلى صيغة المسار الزمني.

5-1- المعادلات الفرقية

اعتبر المتتالية العددية (25، 16، 9، 1،4) والتي نرمز لها بالشكل التالي:

$$Y_1, Y_2, Y_3, \ldots\ldots\ldots Y_t$$

تكون الفروق الأولى لهذه المتتالية أي:

$$\Delta Y_1 = Y_2 - Y_1 = 4 - 1 = 3$$
$$\Delta Y_2 = Y_3 - Y_2 = 9 - 4 = 5$$
$$\Delta Y_3 = Y_4 - Y_3 = 16 - 9 = 7$$
$$\Delta Y_4 = Y_5 - Y_4 = 25 - 16 = 9$$

وتكون الفروق الثانية هي الفروق بين الفروق الأولى أي:

$$\Delta^2 Y_1 = \Delta Y_2 - \Delta Y_1 = 5 - 3 = 2$$
$$\Delta^2 Y_2 = \Delta Y_3 - \Delta Y_2 = 7 - 5 = 2$$
$$\Delta^2 Y_3 = \Delta Y_4 - \Delta Y_3 = 9 - 7 = 2$$

وهكذا ففي هذه المتتالية العددية بالذات تكون الفروق الثانية ثابتة وتساوي:

$$\Delta^2 Y_t = 2 \qquad (5-1)$$

ويمكن كتابة المعادلة (5-1) كالفرق بين اثنين من الفروق الأولى:

$$\Delta Y_{t+1} - \Delta Y_t = 2 \qquad (5-2)$$

يمكن كتابة المعادلة (5-2) كالفرق بين عضوين من المتتالية:

$$(Y_{t+2} - Y_{t+1}) - (Y_{t+1} - Y_t) = Y_{t+2} - 2Y_{t+1} + Y_t = 2 \qquad (5-3)$$

المعادلة (5-3) تكوين معادلة فرقية ولقد وضعت باعتبارات فروقات متتالية عددية فهي تربط العضو لـ *(t+2)* في المتتالية بالعضو *(t+1)* والعضو *(t)*.

وعموما فإن المعادلات الفرقية تربط العضو (t) للمتتالية بأعضاء أخرى سابقة وتكون المعادلة الفرقية العامة الخطية من الدرجة n بمعاملات ثابتة كالتالي:

$$a_0 Y_t + a_1 Y_{t-1} + a_2 Y_{t-2} + \dots\dots\dots\dots + a_n Y_{t-n} + b = 0 \qquad (5-4)$$

المعادلة (5-4) هي معادلة خطية لأنه لايوجد أي Y مرفوعة إلى أي قوة أكبر من واحد، وهي من الدرجة n لأن أقصى قيمة لـ Y المعتمد عليها Y_t هي Y_{t-n} ولهذا فإن العلاقة (5–3) هي معادلة فرقية خطية من الدرجة الثانية بمعاملات ثابتة.

5–2- تعريف الفرق

نفرض أن Y دالة في t أي أن: $y=f(t)$، حيث y معرفة لقيم صحيحة موجبة للمتغير المستقل *(t)*. ونعلم أن المشتق الأولى معرف كما يلي:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{(t+\Delta t) - t} = \lim_{t \to 0} \frac{\Delta Y}{\Delta t} \qquad (5-5)$$

وبدلا من أن نجعل (Δt) تسعى إلى نهايتها فإننا سوف نجعل لها قيمة محددة فإذا كتبنا الصيغة التالية:

$$f(t+\Delta t)-f(t)=y(t+\Delta t)-y(t)=\Delta Y$$

حيث Δ يرمز إلى معامل التأثير على y يسمى "بمعامل الفرق" ونسمي القيمة المحددة Δy بالقيمة الفرقية و من ثم تصبح العلاقة:

$$\begin{aligned}\Delta y_t &= y\,(t+\Delta t)-yt\\ &= y_{t+\Delta t}-y_t\\ &= y_{t+1}-y_t\end{aligned}$$

Δy_t ← يسمى الفرق الأول

y_t ← يرمز إلى قيمة y في الفترة t

y_{t+1} ← يرمز إلى قيمة y في الفترة $t+1$ أي الفترة الموالية لها مباشرة بالمثل يعرف الفرق الثاني لـــ y_t، $\Delta(\Delta y_t)$ أو $\Delta^2 y_t$

$$\begin{aligned}\Delta^2 y_t &= \Delta(\Delta y_t)=\Delta\left[Y_{t+1}-y_t\right]\\ &= \Delta y_{t+1}-\Delta y_t\end{aligned}$$

حيث:

$$\Delta y_{t+1}=y_{t+2}-y_{t+1}$$

$$\Delta y_t = y_{t+1}-y_t$$

$$\begin{aligned}\Delta^2 y_t &= \left[y_{t+2}-y_{t+1}\right]-\left[y_{t+1}-y_t\right]\\ &= y_{t+2}-2y_{t+1}+y_t\end{aligned}$$

ومنه الفرق الثاني

$$\Delta^2 y_t = y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t$$

وبالمثل يكون الفرق الثالث

$$\Delta^3 y_t = y_{t+3} - 3y_{t+2} + 3y_{t+1} - y_t$$

5-3- تعريف المعادلة الفرقية

هي المعادلة التي تبيّن العلاقة بين المتغير المستقل t والمتغير غير المستقل y والشكل العام هو:

$$a_0\, y_{t+n} + a_1\, y_{t+n-1} + a_2\ y_{t+n-2} + ...a_n\ y_t = \phi(t) \qquad (5-6)$$

وهذا الشكل يمثل معادلة فرقية من المرتبة n غير متجانسة.

يمكن أن نكتب العلاقة (5-6) على الشكل التالي:

$$a_0\, t\, y_{t+n} + a_1\, t\, y_{t+n-1} + a_2\, t\, y_{t+n-2} + ...a_n\, t\, y_t = C(t) \qquad (5-7)$$

حيث $(a_1, a_2, ... a_n)$ دوال في (t) [و ليست في y_t] معرفة لــ $(t=0\ 1,2\ ....\ n)$.

5-4- رتبة [الفرق]

يكون الفرق من الرتبة n [حيث n عدد صحيح موجب] للمتغير التابع (y) بالنسبة للزمن « t » بأنه "**فرق الفرق**" من المرتبة $(n-1)$ ونرمز له بـــ:

$$\Delta^n y_t = \Delta(\Delta^{n-1} y_t)$$

أمثلة:

$$y_{t+1} + a y_t = C(t)$$

هذه معادلة فرقية من الرتبة الأولى لأن الفرق بين أكبر دليل واصغر دليل هو $(t+1) - t = 1$

$$y_{t+3} - 3y_{t+2} = 10$$

هذه معادلة فرقية من الرتبة الأولى لأن الفرق بين أكبر دليل واصغر دليل هو $(t+3) - (t+2) = 1$

$$3t\, y_{t+3} - 5t\, y_{t+2} - 8t\, y_{t+1} - 5t\, y_t = 3t$$

هذه معادلة فرقية من الرتبة الثالثة لأن الفرق بين أكبر دليل واصغر دليل هو $(t+3) - t = 3$

يمكن كتابة معادلة الفروق الخطية من المرتبة الأولى بالصيغة التالية:

$$a_0(t) y_{t+1} + a_1(t) y_t = C(t) \qquad (5-8)$$

حيث: $t = 1,2,..........n$

$$C(t) \neq a_1(t) \text{ ، } a_0(t) \neq C(t)$$

ومنه نحصل على:

$$y_{t+1} + \frac{a_1(t)\, y_t}{a_0(t)} = \frac{C(t)}{a_0(t)} \qquad (5-9)$$

5-5- المعادلة الفرقية المتجانسة من المرتبة الأولى

يتحدد الشكل العام لهذه المعادلة بـــ:

$$y_{t+1} + a\,y_t = 0 \qquad (5-10)$$

يفترض الحل لها من الشكل

$$y_t = \lambda^t \qquad (5-11)$$

بوضع المعادلة المميزة نحصل على:

$$\lambda^{t+1} + a\lambda^t = 0$$

$$\lambda^t\,\lambda = -a\,\lambda^t$$

$$\lambda = -a$$

نعوض في العلاقة (5-11) عن λ نحصل على:

$$y^t = (-a)^t \qquad (5-12)$$

العلاقة (5-12) تحدد الحل للمعادلة (5-10) بحيث $y_0 = 1$

ملاحظة

يمكن التوصل إلى اعلاقـة (5-12) باستعمال الطريقة التدريجية [التكرار] كما يلي:

$$y_{t+1} + a\,y_t = 0$$

$$t = 0 \Rightarrow y_1 + a\,y_0 = 0 \Rightarrow y_1 = -a\,y_0$$
$$t = 1 \Rightarrow y_2 + a\,y_1 = 0 \Rightarrow y_2 = -a\,y_1 = -a\,(-a\,y_0) = a^2\,y_0$$
$$t = 2 \Rightarrow y_3 + a\,y_2 = 0 \Rightarrow y_3 = -a\,y_2 = -a\,(a^2 y_0) = -a^3 y_0$$
$$t = 3 \Rightarrow y_4 + a\,y_3 = 0 \Rightarrow y_4 = -a\,y_3 = -a\,(-a^3 y_0) = a^4\,y_0$$

نجد الصيغة العامة للحل العام هي: $y_t = (-a)^t y_0$

مثال: أوجد الحل للمعادلة الفرقية التالية باستخدام الطريقة التدريجية تحت الشرط الابتدائي $y_0 = 6$

$$y_{t+1} = y_t + 3 \qquad (1)$$

أو

$$y_{t+1} - y_t = 3 \qquad (2)$$

المعادلة (2) هي معادلة فرقية من المرتبة الأولى وغير متجانسة باستخدام الطريقة التدريجية

$$t = 0 \Rightarrow y_1 - y_0 = 3 \Rightarrow y_1 = y_0 + 3$$
$$t = 1 \Rightarrow y_2 - y_1 = 3 \Rightarrow y_2 = y_1 + 3 = (y_0 + 3) + 3 = y_0 + 2(3)$$
$$t = 2 \Rightarrow y_3 - y_2 = 3 \Rightarrow y_3 = y_2 + 3 = y_0 + 2(3) + 3 = y_0 + 3(3)$$
$$t = 3 \Rightarrow y_4 - y_3 = 3 \Rightarrow y_4 = y_3 + 3 = y_0 + 3(3) + 3 = y_0 + 4(3)$$
$$t = 4 \Rightarrow y_5 - y_4 = 3 \Rightarrow y_5 = y_4 + 3 = y_0 + 4(3) + 3 = y_0 + 5(3)$$

إذن الحل العام هو: $y_t = y_0 + 3t$

وفي حالة $y_0=6$ فإن الحل الخاص هو: $y_t = 6 + 3t$

5-6- المعادلة الفرقية من الشكل

$$y_{t+1} + a\, y_t = C \qquad (5-13)$$

تمثل المعادلة (5-13) معادلة فرقية ذات المعاملات الثابتة من المرتبة الأولى حيث a و C ثوابت.

أ- في حالة $a \neq -1$ فإن الحل المتمم y_C والذي يمثل الانحرافات للمسار الزمني عن التوازن ويمكن استخراجه بحل المعادلة الفرقية المتجانسة

$$y_{t+1} + a\,y_t = 0$$

$$y_c = A(-a)^t \qquad (5-14)$$

حيث A ثابت

الحل الخاص y_p ويمثل مستوى التوازن الزمني لـــ $y_{t+1} + ay_t = C$

ويكون:
$$y_P = \frac{C}{1+a}$$

إذن يكون الحل العام للمعادلة (5-13) في حالة $a \neq -1$ هو:

$$y_t = y_C + y_P$$

$$y_t = A(-a)^t + \frac{C}{1+a} \qquad (5-15)$$

ب-في حالة $a = -1$ فإن الحل الخاص $y_P = \frac{C}{1+a}$ غير معين فلا بد من البحث عن حل من شكل معين $y_p = k\,t$ حيث k ثابت ما ويكون $y_{t+1} = k(t+1)$ وعند تعويض عن y_t و y_{t+1} في العلاقة (5-13) نحصل على:

$$k(t+1) + a\,k\,t = C$$

$$k\,t + k + a\,k\,t = C$$

$$k\,(t + 1 + a\,t) = C$$

$$k = \frac{C}{t+1+at}$$

لما $a = -1$ يستلزم أن $k = C$ وبالتالي يصبح الحل الخاص للمعادلـــة (5-13) في هذه الحالة بالشكل التالي:

$$y_P = k\,t = C\,t$$

وبجمع حل للمعادلة $y_{t+1} + a\,y_t = 0$ من العلاقة (5-14) والحل الخاص للمعادلة $y_{t+1} + ay_t = C$ نحصل على الحل العام للمعادلة (5-13) بالشكل التالي:

$$y_t = A(-a)^t + C\,t \qquad (5-16)$$

إذن يمكن أن يأخذ الحل العام للمعادلة (5-13) إحدى الصيغ:

في حالة $a \neq -1$

$$y_t = A(-a)^t + \frac{C}{1+a} \qquad (5-17)$$

أو في حالة $a = -1$

$$y_t = A(-a)^t + C\,t \qquad (5-18)$$
$$= A + C\,t$$

ومن أجل حذف الثابت A يمكن أن نضع $t = 0$ للعلاقة (5-17) نصل إلى:

$$y_0 = A + \frac{C}{1+a}$$

حيث

$$A = y_0 - \frac{C}{1+a}$$

وكنتيجة منطقية فإن الحل المحدد للعلاقة (17-5) يأخذ الشكل:

$$y_t = \left[y_0 - \frac{C}{1+a} \right] [-a]^t + \frac{C}{1+a} \qquad a \neq -1$$

وبإتباع نفس العمليات السابقة المذكورة أعلاه يمكن أن نحصل على الحل للحالة (18-5) والذي يمكن أن يأخذ:

$$y_t = y_0 + C\,t$$

أمثلة:

1- حل المعادلة فرقية التالية:

$$y_{t+1} + y_t = 2 \qquad (1)$$

نلاحظ أن $a \neq$-1، $C = 2$

أ) الحل العام هو:

$$y_{t+1} + y_t = 0$$

$$y_t = (-1)^t y_0$$

ب) البحث عن الحل الخاص لـــ $y_{t+1} + y_t = 2$

بما أن $a \neq$-1 فإن الحل الخاص يكون: $y_p = \frac{C}{1+a} = \frac{2}{1+1} = 1$

إذن الحل العام للمعادلة الفرقية (1) هو:

$$y_t = (-1)^t y_0 + 1$$

2- حل المعادلة الفرقية التالية:

$$y_{t+1} - 5y_t = 1 \qquad (2)$$

$a = 5$ ، $C = 1$

- الحل المتمم هو:

$$y_{t+1} - 5y_t = 0$$

$$y_t = (5)^t y_0$$

- الحل الخاص بما أن $a \neq -1$ فإن $y_t = \frac{C}{1+a} = \frac{1}{1-5} = -\frac{1}{4}$

ويكون الحل العام للمعادلة (2) هو: $y_t = (5)^t y_0 - 1/4$

5-7- المسار الزمني

لاستخراج المسار الزمني للعلاقة التالية:

$$y_t = b + ay_{t-1}. \qquad (5-17)$$

حيث a و b ثوابت نطبق الصيغة العامة [الحل العام التالي]:

$$y_t = \left[y_0 - \frac{b}{1+a}\right][-a]^t + \frac{b}{1+a}$$

$a \neq -1$

أو

$$y_t = \left[y_0 - \frac{b}{1-a}\right][a]^t + \frac{b}{1-a} \qquad a \neq 1$$

مثال:

حل المعادلة الفرقية التالية باستخدام الطريقة العامة مع العلم أن $y_0 = 5$

$$y_t = -7y_{t-1} + 16 \qquad (1)$$

$$y_t = \left[y_0 - \frac{b}{1-a}\right][a]^t + \frac{b}{1-a}$$

$$a \neq 1, = -7 \qquad b = 16, \qquad y_0 = 5$$

$$y_t = [5 - 16/[1-(-7)]\,]\,[-7]^t + 16/[1-(-7)]$$

$$y_t = [3][-7]^t + 2 \qquad (2)$$

اختبار النتيجة:

نعوض $t = 0$، $t = 1$، في العلاقة (2) نحصل على:

$$y_0 = 3(-7)^0 + 2 = 5$$
$$y_1 = (3)(-7)^1 + 2 = -19$$

نعوض بـ y_1 لـ y_t و بـ y_0 لـ y_{t-1} في العلاقة (1)

$$(-19) = -7(5) + 16$$

5-8- أنماط الاتجاهات الزمنية

يمكن التعبير عن المعادلة التالية:

$$y_t = [y_0 - b/(1-a)][a]^t + b/(1-a) \qquad (5-18)$$

بالصيغة العامة

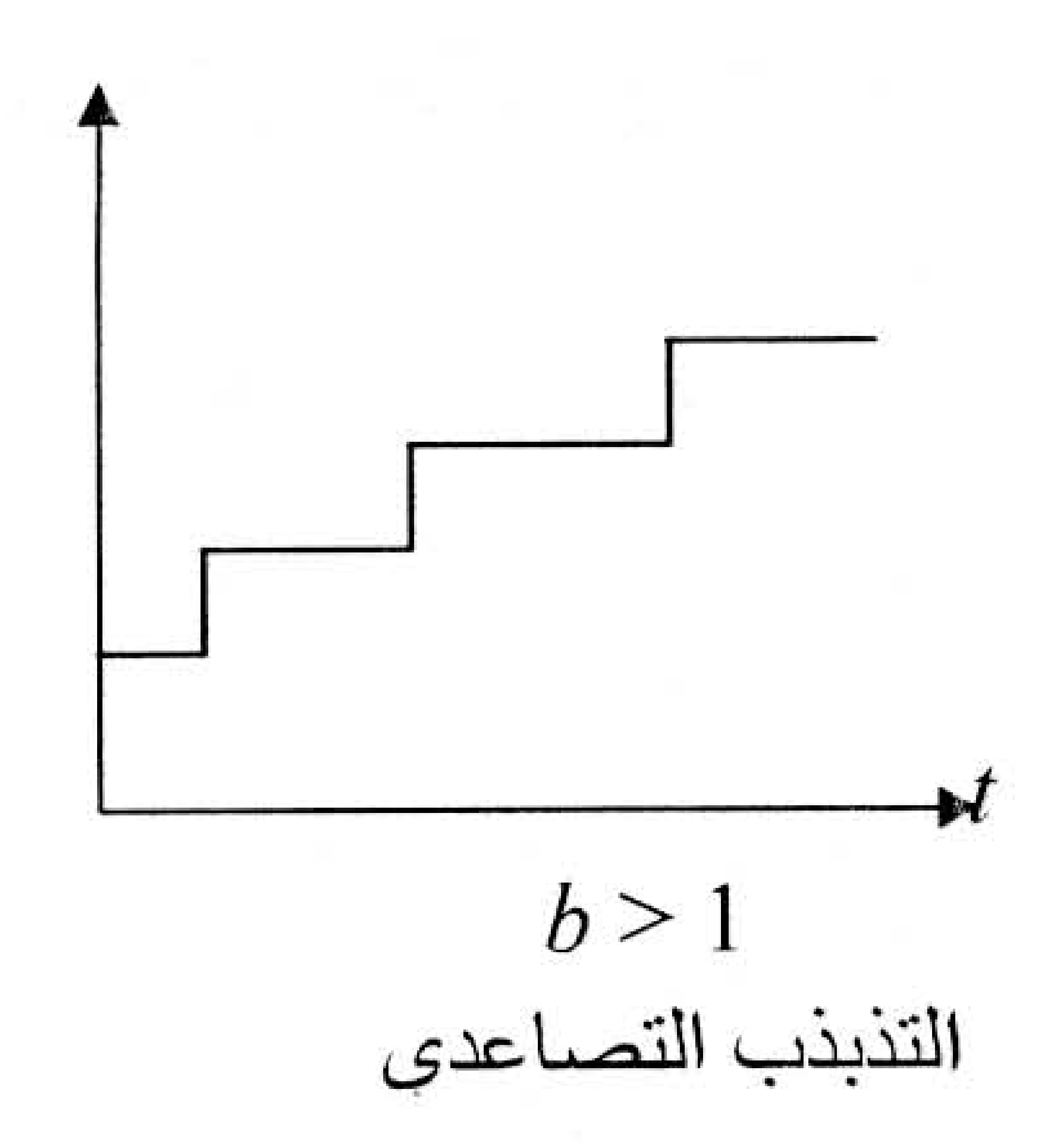
$$y_t = C + Ab^t \qquad A = y_0 - \frac{b}{1-a}$$

حيث

$$C = \frac{b}{1-a}$$

تدعى $A\ b^t$ بالدالة المكملة [الحل المتمم] وتمثل الانحراف عن التوازن و C يمثل حل خاص ويعبر عن مستوى التداخل المؤقت للتوازن y. و يمكن التعرف على المسار الزمني للدالة موضوع الدراسة من قيمة الأساس b. فإذا افترضنا أن $A = 1$ و $C = 0$ للحظة فإن التعبير اللوغاريتمي b^t سوف ينتج سبعة اتجاهات زمنية مختلفة وهذا بالاعتماد على قيمة b من المعادلة $y_t = b^t$ مع العلم أن المدى b يمكن أن يمتد من ∞ - إلى + ∞.

الاتجاه الزمني الأول: إذا كانت قيمة $b > 1$ فإن b^t سوف تزداد مع زيادة قيمة t والمسار الزمني للدالة يبتعد عن حالة التوازن بمرور الزمن ويكون التذبذب التصاعدي. فإذا افترضنا أن $b = 3$ ومن ثم t تذهب من (0 إلى4) فإن: $b^t = 1, 2, 3, 9, 27, 81$

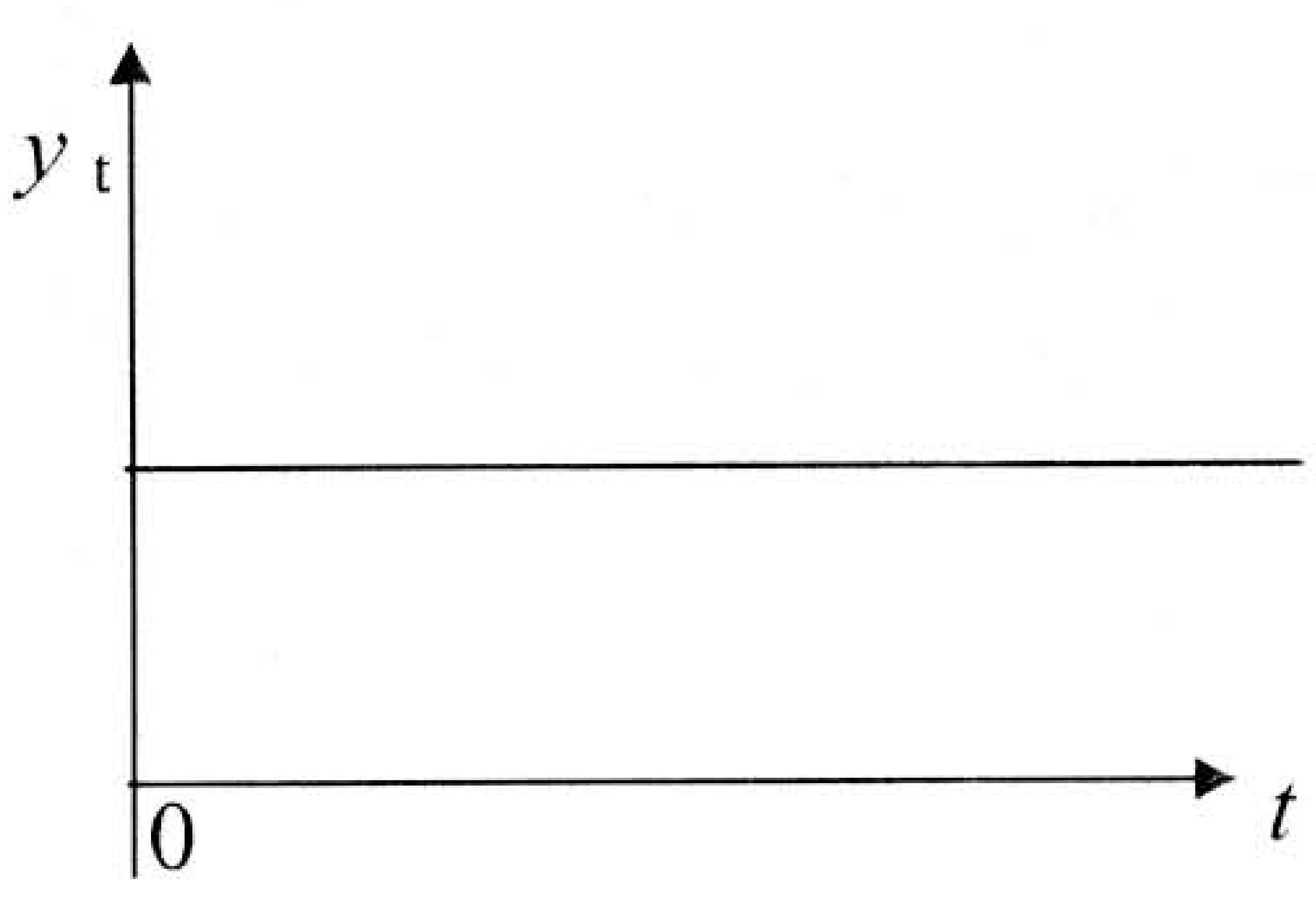


$b > 1$

التذبذب التصاعدي

يتضح من الشكل أن الدالة المتمثلة في مدى التغيرات الوثابة للزمن ليست دالة مستمرة.

الإتجاه الزمني الثاني: إذا كانت قيمة $b = 1$ فإن $b^t = 1$ لكافة قيم (t)، وهذه تمثل الخط الأفقي و تكون الدالة في حالة ابتعاد ثابت عن حالة التوازن.

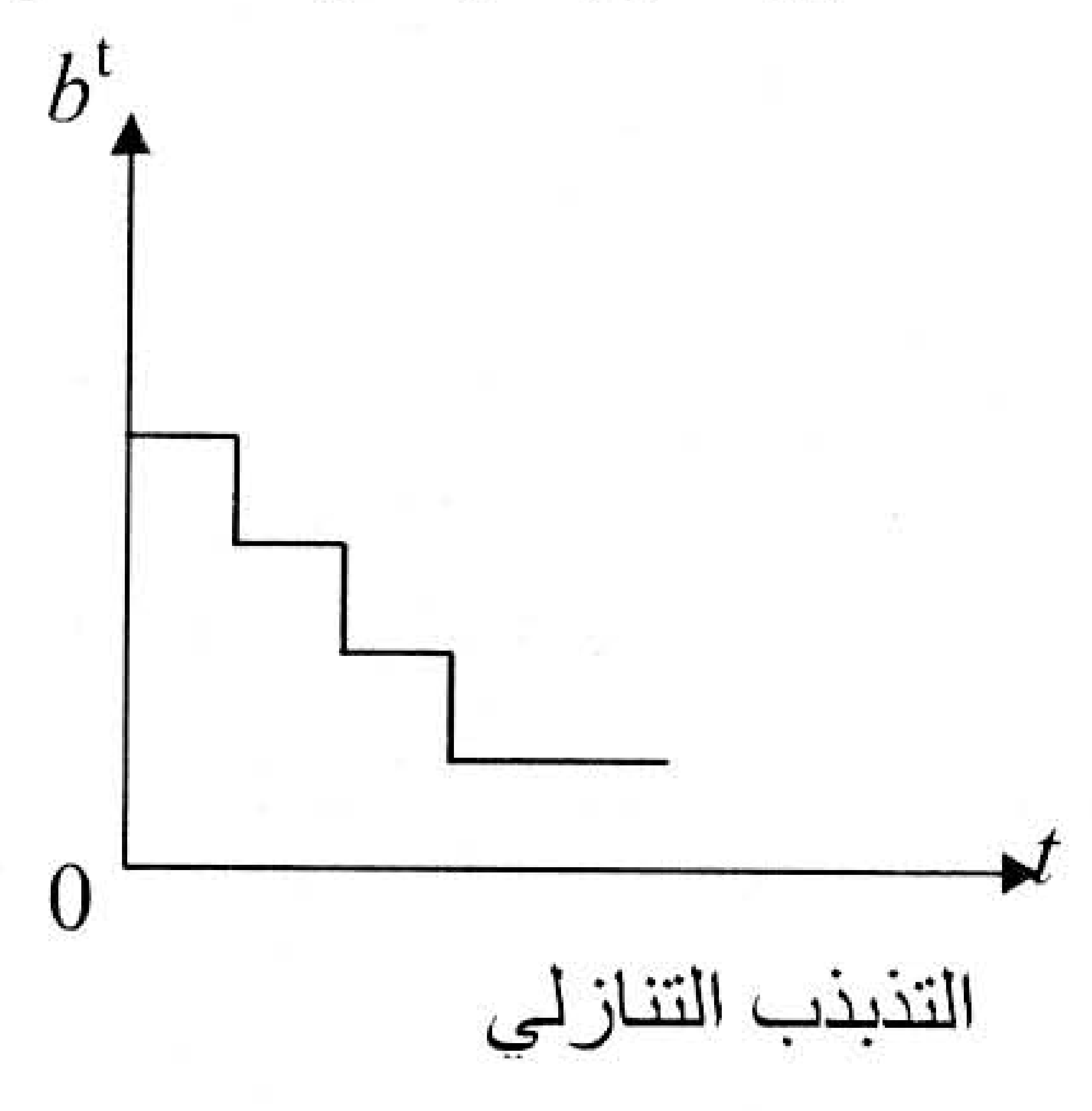


$b=1$

التذبذب المنتظم

الاتجاه الزمني الثالث: إذا كانت $0 < b < 1$ فإن المسار الزمني للدالة يقترب من حالة التوازن بمرور الزمن أي قيمة b^t تقترب من صفر

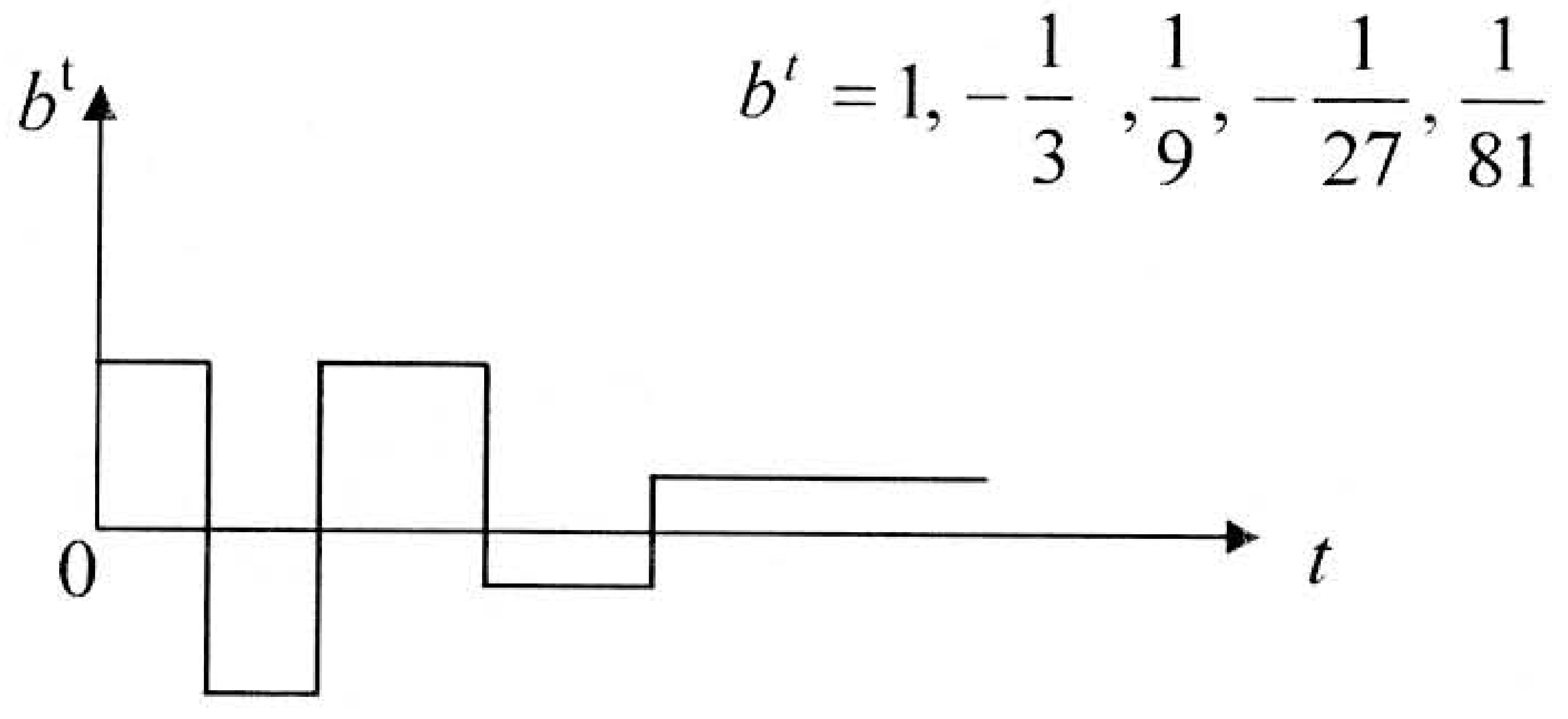
بمرور الزمن [التذبذب تنازلي] بافـــتراض أن $b=\frac{1}{3}$ وكانـــت قيمة t تذهب من (0 إلى 4) فإن: $b^t=1\ ,\frac{1}{3}\ ,\frac{1}{9}\ ,\frac{1}{27}\ ,\frac{1}{81}$



التذبذب التنازلي

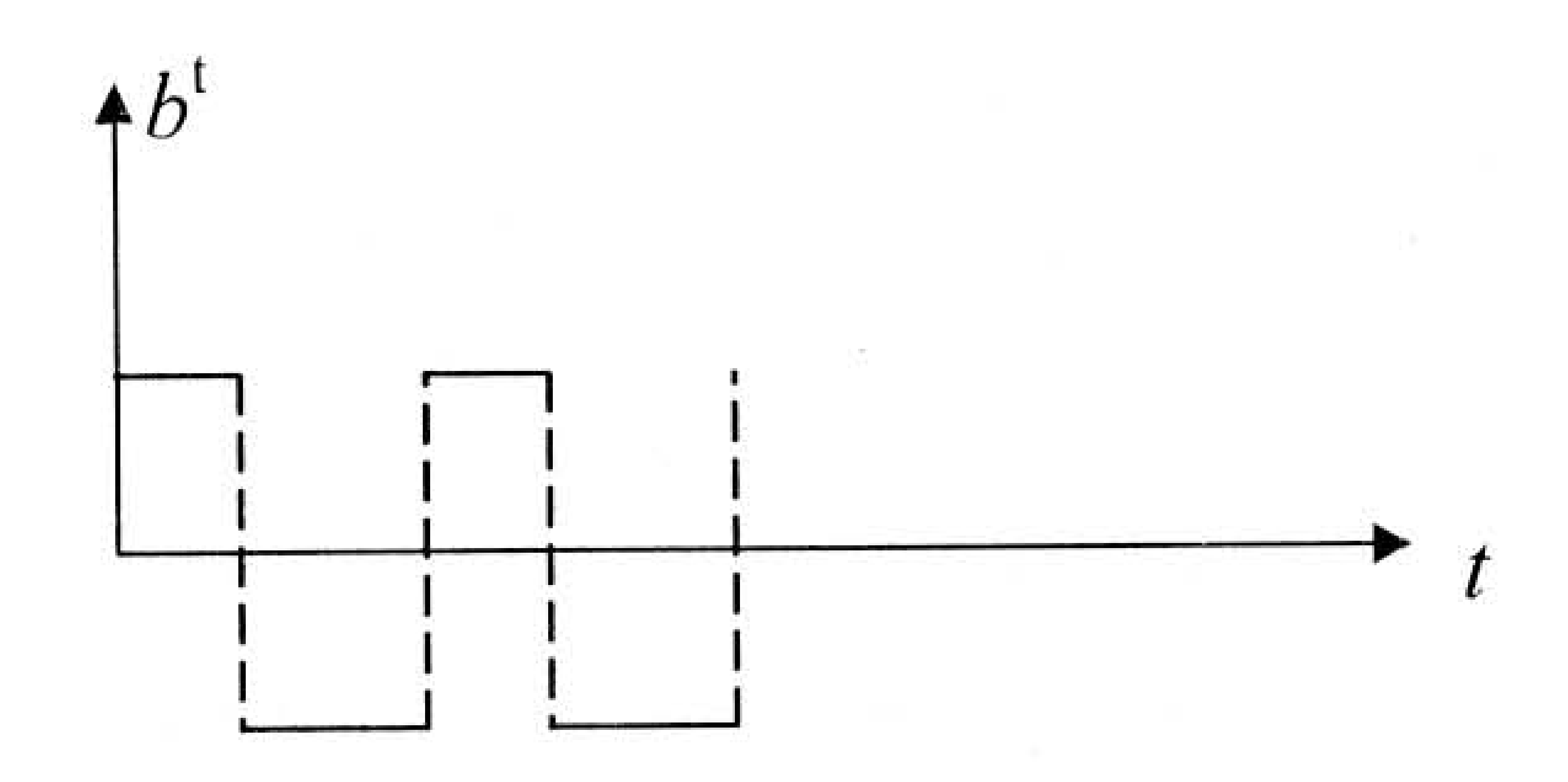
الاتجاه الزمني الرابع: إذا كانت $0 > b > -1$ فإن المسار الزمني للدالة يقترب من حالة التوازن وذلك باتجاه أقرب فأقرب من المحور كلما زادت (t). بافتراض أن $b=-\frac{1}{3}$، وكلما ذهبت قيمة t من 0 إلى 4 فإن:

$$b^t=1, -\frac{1}{3}\ ,\frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}$$



تدبدب متناقص

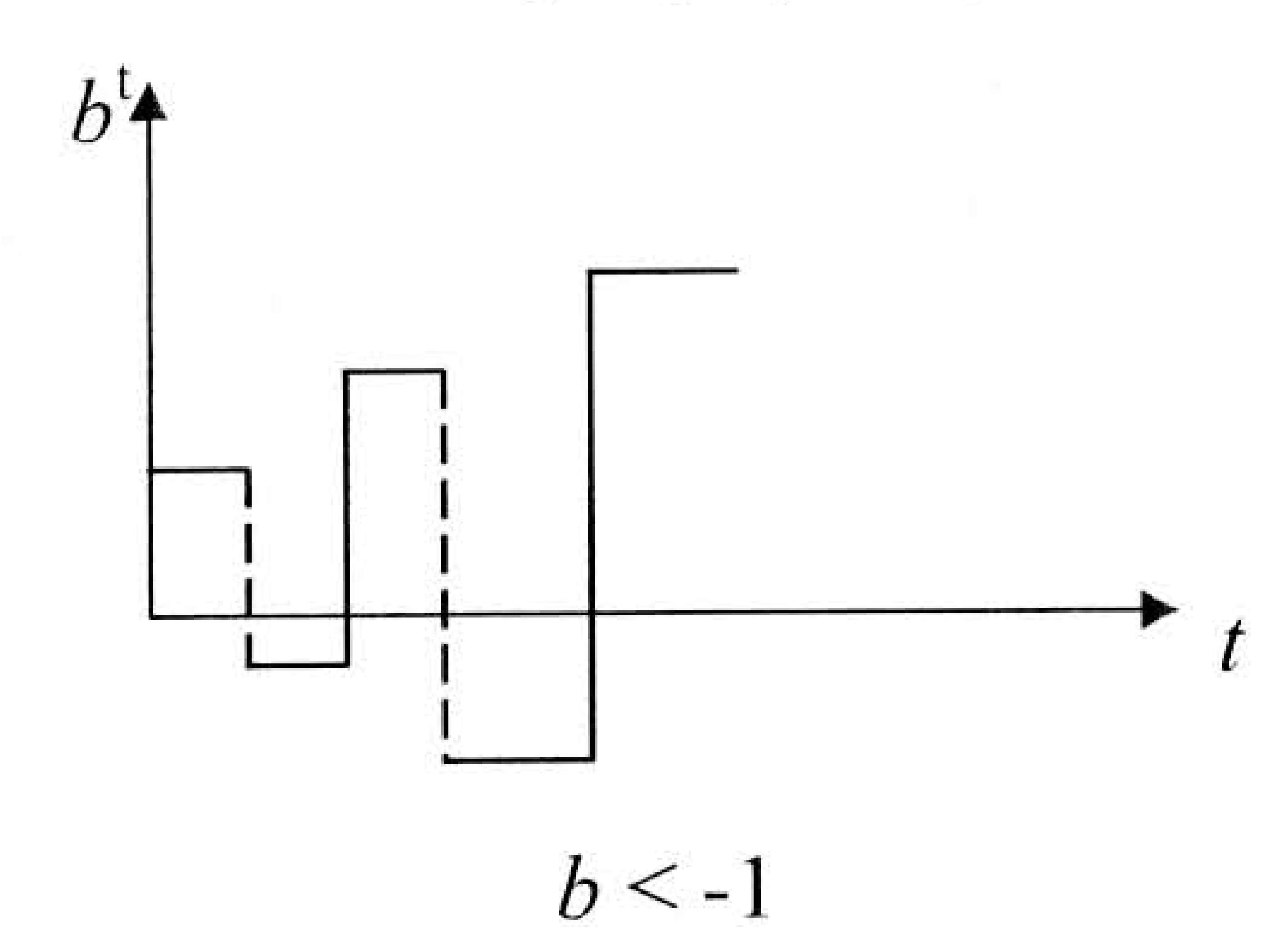
الاتجاه الزمني الخامس: إذا كانت $b = -1$ وكانت قيمة (b^t) متذبذبة بين (-1) أو $(+1)$ فتكون الدالة متذبذبة وفي حالة ابتعاد متذبذب عن التوازن



التذبذب الثابت

الاتجاه الزمني السادس: إذا كانت $b < -1$ فإن b^t سوف تتذبذب وتتحرك أكثر فأكثر و تبتعد عن المحور الأفقي، أي تكون الدالة في حالة ابتعاد متزايد عن حالة التوازن، بافتراض أن $b = -3$ و t تتراوح بين (0، 4) عندئذ:

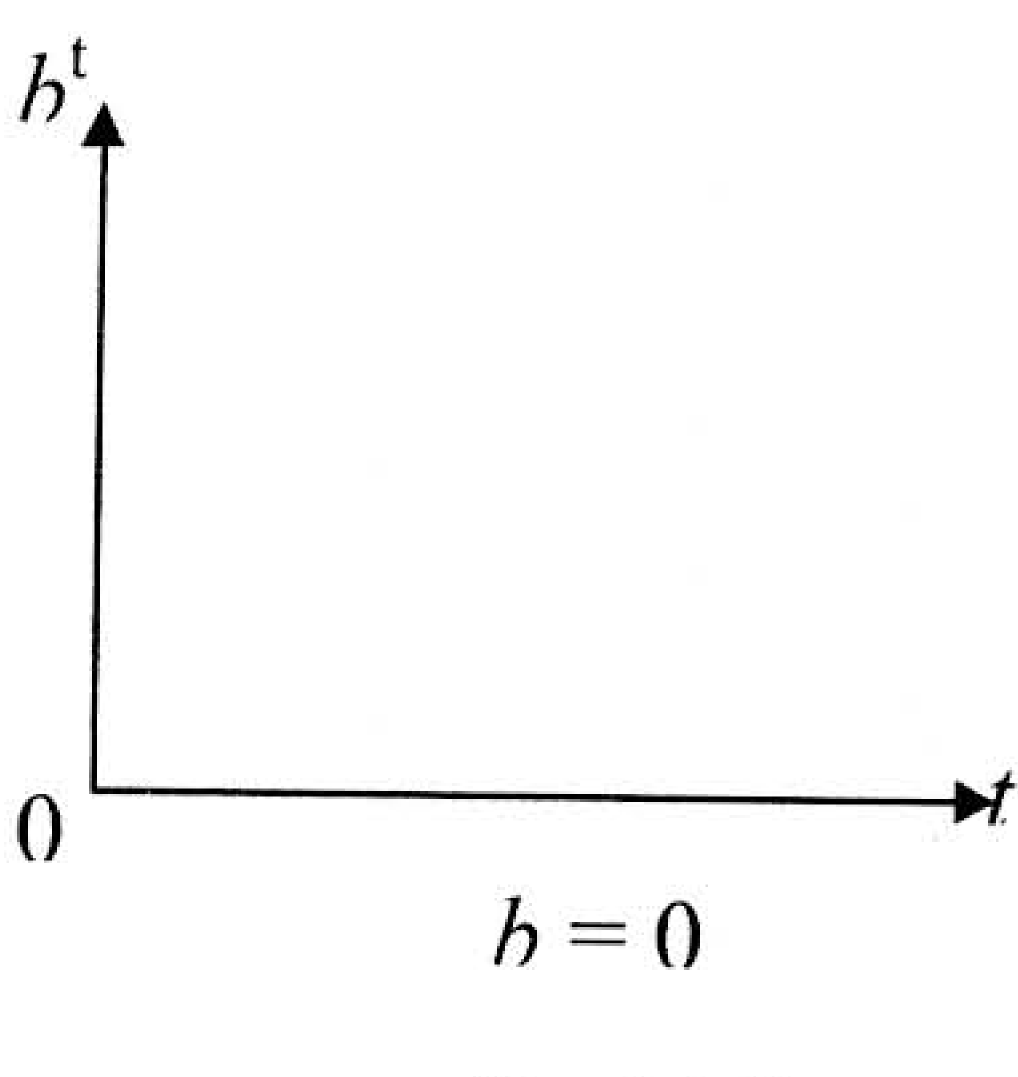
$$b' = 1, -3,\ 9,\ -27,\ 81$$



$b < -1$

التذبذب الانفجاري

الاتجاه الزمني السابع: إذا كانت قيمة $b = 0$ فإن قيمة الدالة تكون ثابتة $b^t = 0$



التذبذب ثابت

وباختصار إذا كانت

$-1 < b < 1$ فإن المسار الزمني متقارب

$b < -1$ فإن المسار الزمني متباعد

$b > 1$ فإن المسار الزمني متباعد

$b = 1$ فإن المسار الزمني غير متقارب

$b = -1$ فإن المسار الزمني غير متقارب

أمثلة

حدد اتجاه المسار الزمني Trajectoire للحلول التالية:

1) $y_t = 6(-\frac{1}{4})^t + 6$

حيث أن $b=-\frac{1}{4}\langle 0$ عندئذ فأن المسار الزمني منتظم وأيضا $\left|\frac{1}{4}\right|=|b|\langle 1$ فإن المسار الزمني متباعد (Divergent).

2) $y_t=10(-3)^t+2$

حيث إن $b=-3\langle 0$ عندئذ المسار الزمني منتظم و $|b|=|3|\rangle 1$ فإن المسار الزمني متقارب (Convergent).

3) $y_t=5(6)^t+9$

حيث إن $b=6\rangle 0$ عندئذ المسار الزمني غير منتظم و $|b|=|6|\rangle 1$ فإن المسار الزمني متقارب (Convergent).

5-9- التطبيق الاقتصادي

5-9-1- نموذج الدخل الوطني

إذا كانت معادلة الدخل الوطني y_t ممثلة في العلاقة التالية:

$$y_t=C_t+I_t \qquad (5-19)$$

وبافتراض أن دالة الاستهلاك هي:

$$C_t=a+b\ y_{t-1} \qquad (5-20)$$

حيث a تمثل الاستهلاك المستقل من الدخل و b يمثل الميل الحدي للاستهلاك. وباعتبار أن الاستثمار I ثابت فإن معادلة الدخل الوطني تصبح تصبح على الشكل التالي:

$$y_t=a+b\ y_{t-1}+I_0 \qquad (5-21)$$

تمثل المعادلة (21-5) معادلة الفرق من المرتبة الأولى وخطية، وفي حالة استمرار التغير في الدخل y_t مع تغير الزمن فإن هذه الاستمرارية تتطلب معرفة مسبقة للقيمة الأولية لـــ y_t أي قيمة y_0. وبافتراض معرفة قيم a، b و I_0 و y_0 يمكن إعادة ترتيب المعادلة (21-5)

$$y_t = A + b\ y_{t-1}$$

حيث

$$A = a + I_0$$

$$y_1 = A + b\ y_0$$

$$y_2 = A + b\left[A + b\ y_0\right]$$

$$y_3 = A + b\left[A + b\ (A + b\ y_0)\right]$$

نلاحظ من المعادلات السابقة أنها تتكون من جزئين: الجزء الأول ثابت هو A والجزء الثاني متغير وهو يتغير في كل فترة من الفترات الثلاثة ويمثل نسبة ثابتة (b) من الدخل الفترة السابقة.

نستنتج من ذلك أن نمط الزيادة بمرور الزمن في الجزء المتغير يتوقف على قيمة الميل الحدي للاستهلاك وهو b في المعادلة.

فإذا كانت $1 \rangle b \rangle 0$ فإن الجزء المتغير يزداد زيادة متناقصة بمرور الزمن تقترب من الصفر باقتراب عدد الفئات الزمنية من ما لانهاية حيث يستقر مستوى الدخل الوطني عند قيمة توزانية.

فإذا افترضنا أن $a = 15$، $b = 0,8$، $y_0 = 500$ و $I_0 = 100$، يصبح نمط التغير في الدخل الوطني [العلاقة (5-19)] بالشكل التالي:

$$y_1 = 15 + 0,8\ y_{1-1} + 100$$
$$= 115 + 0,8\ y_0$$

$$= 115 + 0,8\ (500) = 515$$
$$y_2 = 11 + 0,8(515) = 527$$

يمكن بهذه الطريقة حساب قيمة الدخل في فترات قريبة، لكن إذا كانت فترة بعيدة [عندما تكون t كبيرة] t إلى ما لانهاية يمكن حساب y^* القيمة التوازنية من المعادلة التالية:

$$y_t = 115 + 0,8 y_{t-1} \qquad (5-22)$$

5-9-2- نموذج نسيج العنكبوت

نعلم أن توازن السوق يتحدد عند تقاطع منحنى العرض ومنحنى الطلب حيث تتحدد الكمية التوازنية والسعر التوازني وهذا عند افتراض أن الكمية المعروضة والمطلوبة تستجيبان آنيا لتغيرات السعر.

أما في نسيج العنكبوت الذي يعتبر نموذج مبسط لسوق سلعة ما ويستخدم في تحليل أسواق المنتجات الزراعية لماذا ؟ لان الكمية المعروضة تستجيب بعد فترة إبطاء وهذه الاستجابة البطيئة للعرض

تصبح مقبولة في حالة بعض السلع الزراعية، إذن يمكن كتابة دالة العرض بالصيغة التالية:

$$Q_{St} = -\alpha + \beta\ P_{t-1} \qquad (5-23) \qquad \alpha, \beta \rangle 0$$

أما الكمية المطلوبة من السلعة ما فهي (Q_{dt}) وسعرها في نفس الفترة هو P_t حيث نعتبر أن هذه الكمية في هذه الفترة تعتمد على السعر السائد في السوق في نفس الفترة أي هناك استجابة آنيا للكمية المطلوبة في حالة تغيرات السعر، ويمكن وضعها وفق العلاقة التالية:

$$Q_{dt} = a - bP_t \qquad (5-24) \qquad a, b \rangle 0$$

وبالإضافة إلى المعادلتين (5-23 و5-24) يتضمن نموذج نسيج العنكبوت معادلة شرط التوازن:

$$Q_{St} = Q_{dt} \qquad (5-25)$$

ولحل نموذج نسيج العنكبوت والوصول إلى السعر التوازني P_t نقوم بتعويض المعادلتين (5-23، 5-24) في (5-25) نحصل على المعادلة التالية:

$$a - bP_t = -\alpha + \beta\ P_{t-1}$$
$$bP_t + \beta\ P_{t-1} = \alpha + a$$
$$bP_t = -\beta\ P_{t-1} + (\alpha + a)$$
$$bP_t + \beta\, P_{t-1} = \alpha + a \qquad (5-26)$$

تمثل المعادلة (5-26) معادلة الفروق من الدرجة الأولى وبقسمة طرفي هذه المعادلة على b نحصل على:

$$P_t + \frac{\beta}{b} P_{t-1} = \frac{\alpha + a}{b} \qquad (5-27)$$

وبما أن $b< 0$، $\beta > 0$ في ظل الظروف الطبيعية للطلب والعرض لذلك فإن $\frac{\beta}{b} \neq 1$، أو $\left[\frac{\beta}{b} \neq -1\right]$.

وباستخدام الحل العام للعلاقة (5-18)نحصل على:

$$p_t = \left[p_0 - \frac{\frac{\alpha + a}{b}}{1 - \left(-\frac{\beta}{b} \right)} \right] \left[-\frac{\beta}{b} \right]^t + \left[\frac{\frac{\alpha + a}{b}}{1 - \left(-\frac{\beta}{b} \right)} \right]$$

$$P_t = \left[P_0 - \frac{\alpha + a}{b + \beta} \right] \left[-\frac{\beta}{b} \right]^t + \frac{\alpha + a}{b + \beta} \qquad (5-28)$$

وفي حالة أن يكون النموذج في الوضع التوازني فإن:

$$P_t = P_{t-1} = P_e$$

نعوض عن P_t و P_{t-1} بالرمز P_e في العلاقة (5-26) نجد:

$$bP_e = -\beta\, P_e + (\alpha + a)$$
$$bP_e + \beta\, P_e = \alpha + a$$
$$P_e\left[b + \beta\right] = \alpha + a$$
$$P_e = \frac{\alpha + a}{b + \beta}$$

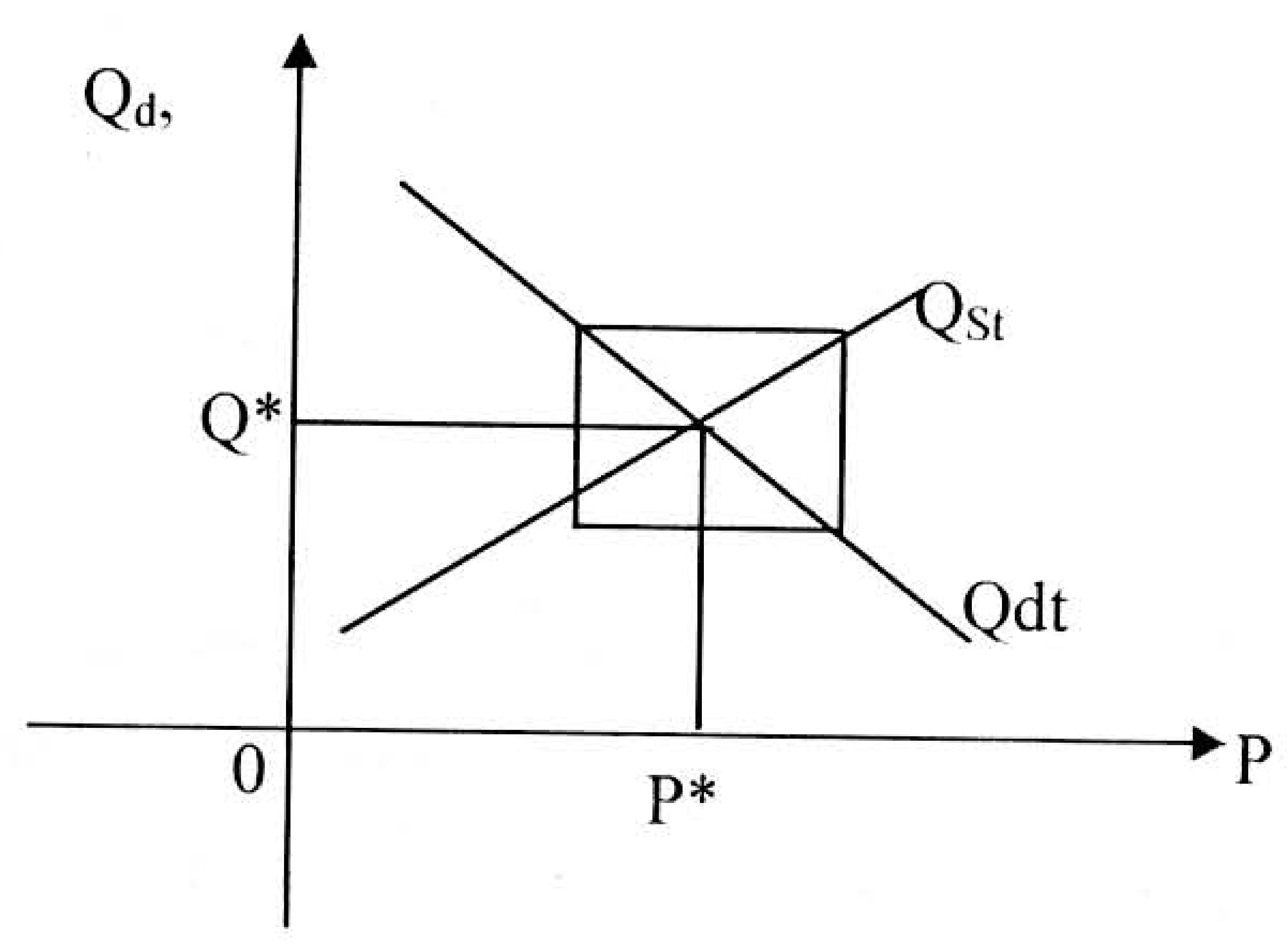
نعوض في العلاقة (5−28) بـــ $P_e = \dfrac{\alpha + a}{b + \beta}$ نحصل على:

$$P_t = \left[P_0 - P_e\right]\left[-\beta / b\right]^t + P_e \qquad (5-29)$$

تسمى المعادلة (5-29) بمعادلة الحل العام للنموذج العنكبوتي وأيضا تسمى الحل بطريقة السعر التوازني حيث أن P_t يمثل السعر التوازني وأن P_0 السعر الابتدائي. والعبارة $\left[P_0 - P_e\right]$ تعوض A في الجزء Ab^t و إشارتها تبين فيما إذا كان السعر الإبتدائي يتواجد تحت أو فوق السعر التوازني.

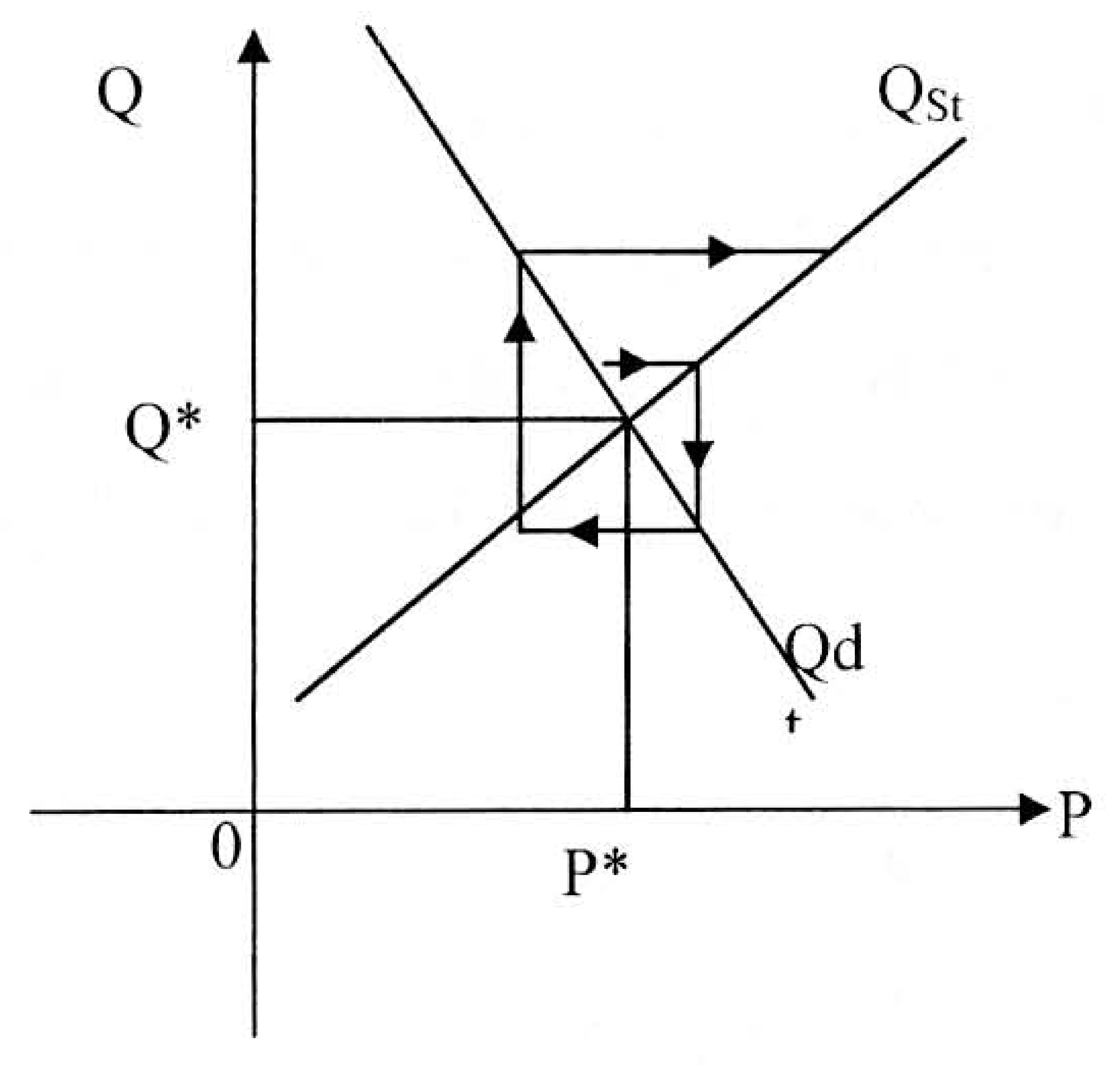
كما أن P_t يكون معتمدا في اتجاهه نحو التوازن على قيم (β, b) لأننا افترضنا أن $\frac{\beta}{b} \neq 1$، أو $\left[\frac{\beta}{b} \neq -1\right]$، وبالتالي توجد ثلاث حالات يمكن مواجهتها في المسار الزمني للنموذج العنكبوتي وهي:

-1- إذا كان ميل منحنى العرض يساوي ميل منحنى الطلب أي $\beta = |b|$ ويكون السعر والكمية متذبذبان عند كميتين ثابتتين بعيدتين عن حالة التوازن فهذا يدل على أن المسار الزمني مسار متذبذب بشكل منتظم ويسمى نموذج نسيج العنكبوت المنتظم وهي حالة ابتعاد ثابت عن حالة التوازن.



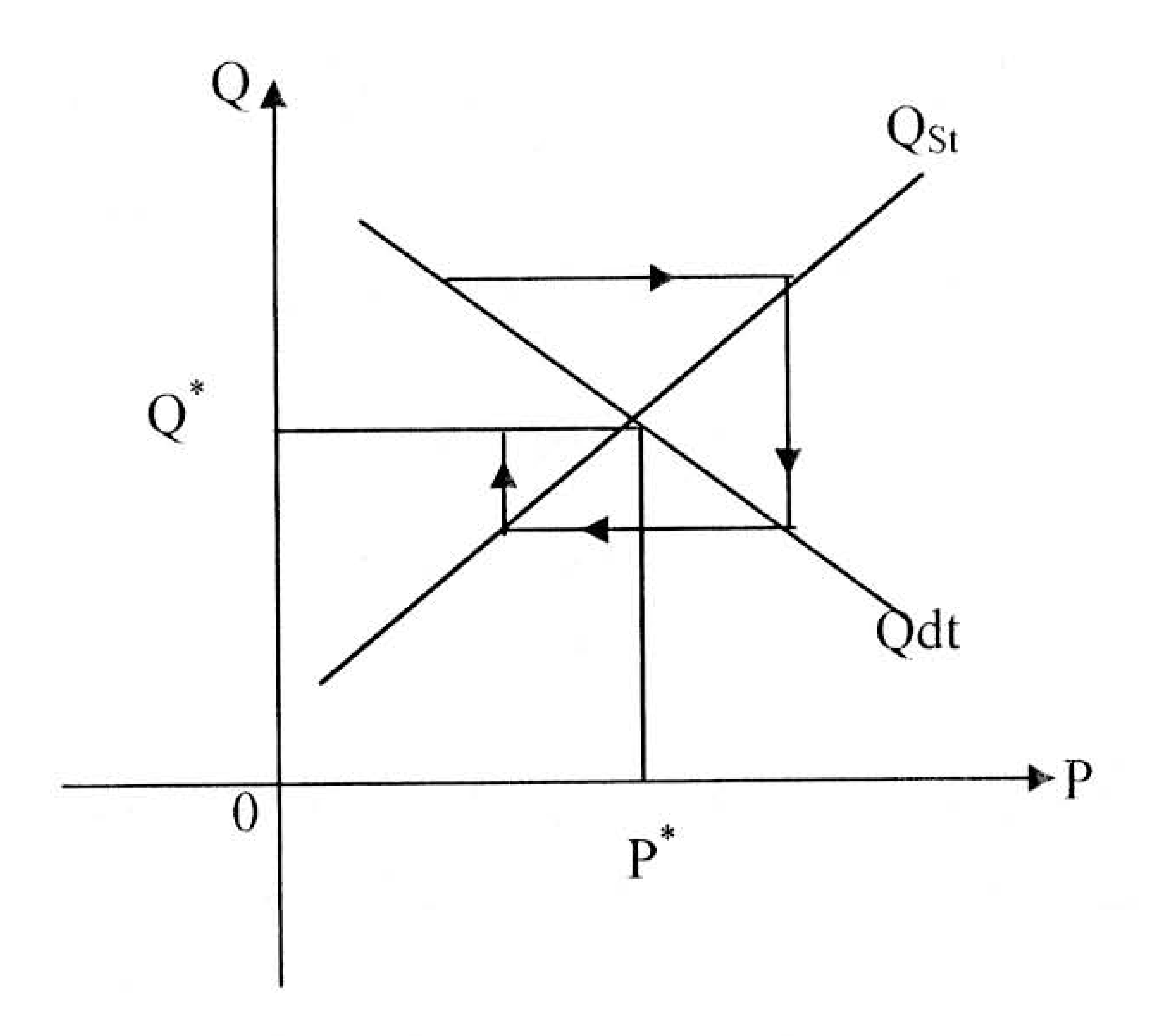
نسيج العنكبوت ذات المسار المتذبذب المنتظم $\beta = |b|$

2- إذا كان ميل منحنى العرض أكبر من ميل منحنى الطلب أي $\beta \rangle |b|$ عندها تكون تقلبات السعر والكمية المعروضة تأخذ مسارات زمنيا [شكل التذبذب] متباعدا Divergent أو تصاعديا، ويسمى بنموذج نسيج العنكبوت الانفجاري لأنه في حالة ابتعاد تدريجي عن حالة التوازن [ميل منحنى العرض اقل انحدارا من ميل منحنى الطلب]



نموذج نسيج العنكبوت الانفجاري ذات المسار المتباعد $\beta \rangle |b|$

-3- إذا كان ميل منحنى العرض أصغر من ميل منحنى الطلب أي $|b| \rangle \beta$ فان تذبذب السعر والكمية المعروضة يتم بسلسلة متناقصة أو متقاربة من التقلبات إلى أن يستقر السعر والكمية المعروضة عند مستوى السعر والكمية التوازنيتين. ويكون شكل المسار الزمني [أي شكل التذبذب] تنازليا أو متقاربا Convergent ويسمى في هذه الحالة نموذج نسيج العنكبوت المتقارب [يكون ميل منحنى الطلب أقل انحدارا من ميل منحنى العرض].



نموذج نسيج العنكبوت المتقارب $\beta \langle |b|$

مثال:

لدينا نموذج السوق التالي لسلعة زراعية

$$Q_{dt} = 100 - 5P_t$$

$$Q_{St} = 5 + 2P_{t-1}$$

المطلوب:

تحديد طبيعة النموذج ثم أحسب أسعار السلعة للفتـــرة 6.... 1 = t علما أن السعر الابتدائي $P_0 = 10$.

الحل

من خلال السعر الابتدائي يمكن تحديد الكمية المعروضة من السلعة

$$Q_{St} = 5 + 2(10) = 25$$

وإذا علمنا بأن $[Q_{St} = 25]$ ليست الكمية التوازنية لأن السعر التوازني يتحدد بدالة العرض هو سعر فترة زمنية سابقة بينما السعر الذي يتحدد بدالة الطلب هو السعر الحالي.لذلك نستخرج السعر للفترة الحالية من دالة الطلب

$$Q_{dt} = 100 - 5P_t$$

$$25 = 100 - 5P_t$$

$$P_t = \frac{100-25}{5} = 15$$

نلاحظ أن هذا السعر P_t أكبر من السعر الابتدائي ومن السعر التوازني لذلك سيحفز المنتجين على إنتاج كمية أكبر في الفترة اللاحقة $(t+1)$ أي أن:

$$Q_{S\,t+1} = 5 + 2(15) = 35$$

وهذه الكمية المعروضة في الزمن $(t+1)$ هي أكبر من الكمية المعروضة في الزمن (t) وسيؤدي ذلك إلى خفض السعر في الزمن $(t+1)$ لتحفيز المستهلكين على شراء كميات إضافية وهذا ما نجده في دالة الطلب:

$$35 = 100 - 5\,P_{t+1}$$

$$P_{t+1} = 13$$

وهذا السعر $P_{t+1} = 13$ أقل من السعر $P_t = 15$ لذا سيؤدي إلى خفض الكميات المعروضة في الزمن $t+2$ أي:

$$Q_{S\,t+2} = 5 + 2(13) = 31$$

وتكون أسعار الزمن $t+2$ هي:

$$31 = 100 - 5P_{t+2}$$

$$P_{(t+2)} = 13,8$$

وباعتبار أن الأسعار تعتبر الأساس للمنتجين لعرض سلعهم في السنة (t+3) فتكون الكمية المعروضة هي:

$$Q_{S\,t+3} = 5 + 2(13{,}8) = 32{,}6$$

وهكذا تستمر التذبذبات في الأسعار والكميات لبقية السنوات كالتالي:

$$32{,}6 = 100 - 5P_{t+3}$$
$$P_{t+3} = 13{,}48$$
$$Q_{S\,t+4} = 5 + 2\,(13{,}48) = 31{,}96$$
$$31{,}96 = 100 - 5P_{t+4}$$
$$P_{t+4} = 13{,}61$$
$$Q_{S\,t+5} = 5 + 2\,(13{,}61) = 32{,}22$$
$$32{,}22 = 100 - 5P_{t+5}$$
$$P_{t+5} = 13{,}56$$

ملاحظة: السنة t+5 هي نفسها السنة t=6

وبما أن السعر التوازني هو:

$$\overline{P} = \frac{a+b}{\beta+\alpha} = 13{,}57$$

لذا فإن السعر الابتدائي $P_0 = 10$ قد تعرض لمسيرة من التذبذب جعلته يقترب من السعر التوازني $(\overline{P} = 13{,}57)$ أي أن المسار الزمني للنموذج كان تقاربي «Convergent».

تمارين الفصل الخامس

التمرين 1-5

حل معادلات الفروق المنتهية التالية باستخدام الطريقة العامة

1) $y_{t+1} + y_t = 25 \qquad y_0 = 40$

2) $2y_{t+1} - y_t = 18 \qquad y_0 = 10$

3) $2\, y_{t+5} + 5 - 4_{t+4} = 8 \qquad y_0 = 6$

4) $\Delta y_t + y_t = 10 \qquad y_0 = 45$

التمرين 2-5

إذا كانت دالة الدخل الوطني محددة بالشكل التالي:

$$y_t = 5 - \frac{1}{4} y_{t-1}$$

حيث أن $y_0 = 2$

استخدم طريقة الحل العام لحساب المسار الزمني للدخل الوطني مبيّن مدى اتجاهه نحو حالة التوازن بمرور الزمن من عدمه.

التمرين 3-5

إذا كانت معادلة الاستهلاك محددة بالعلاقة التالية:

$$C_t = 2000 + 0{,}9 y_{t-1}$$

وإذا افترضنا أن مستوى الإنفاق الاستثماري $I_t=100$ وأن الدخل الابتدائي $y_0=4500$ استخدم طريقة الحل العام في حل معادلة الفروق لبيان مدى اتجاه الدخل نحو حالة التوازن بمرور الزمن من عدمه.

التمرين 4-5

إذا كانت لديك معادلتي الطلب و العرض كما يلي:

$$Q_d = 220 - 0,4P_t$$
$$Q_S = -30 + 0,6P_{t-1}$$

مطلوب:

حدد المسار الزمني للسعر باتجاه التوازن من عدمه، ثم اختبر إجابتك عندما تكون $t = 0\ ,\ 1, 2$ باستخدام طريقتي السعر التوازني وطريقة الحل العام مع العلم أن $P_0 = 254$.

التمرين 5-5

بإفتراض أن كميات الطلب والعرض لسلعة ما خلال فترة t تتغير تبعا للسعر حسب النموذج التالي:

$$QD_t = a - bP_t \qquad (a;b) \in IR_+^* \times IR_+^*$$
$$QO_t = C + dP_{t-1} \qquad (c,d) \in IR_-^* \times IR_+^*$$

المطلوب:

1- أدرس توازن هذا السوق

2- إذا أخذنا الآن النموذج التالي:

$$QD_t = a - bP_t \qquad (a;b) \in IR_+^* \times IR_+^*$$

$$QO_t = C + dP_{t-1} \qquad (c,d) \in IR_-^* \times IR_+^*$$

$$p_{t+1} = P_t - \sigma(Qo_t - QD_t) \qquad \sigma \in IR_+^*$$

أدرس توازن هذا السوق

تطبيق عددي $\sigma = 0,3 \quad d = 6 \quad c = -3 \quad b = 2 \quad a = 21$

الفصل السادس

المصفوفات

6-1- مفاهيم عامة على المصفوفة

6-2- العمليات على المصفوفات

6-3- المحددات

6-4- تطبيق اقتصادي

التمارين



6-1- مفاهيم عامة على المصفوفة

هي مجموعة منتهية من الأعداد الحقيقية مرتبة في أسطر عددها m وأعمدة عددها n وتحاط هذه الأسطر والأعمدة بقوسين حيث m ، n عددان صحيحان موجبان.

يرمز عادة للمصفوفة بالأحرف الكبيرة .... ,A, B, C ولعناصرها بالأحرف الصغيرة .... ,a, b, c و ترفق هذه العناصر بالدليلين i , j حيث i يدل على رقم السطر و j يدل على رقم العمود أي:

$$A=(a_{ij})_{m\times n} \quad , \quad A=(a_{ij})$$
$$A_{mn}=(a_{ij}) \quad , \quad A=\left|a_{ij}\right|_{m\times n}$$

الشكل العام للمصفوفة هو:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\ldots & a_{2n} \\ a_{m1} & \ldots. & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

ونقول أن المصفوفة A ذات البعد $(m \times n)$.

عندما يكون عدد الأسطر يساوي عدد الأعمدة أي $(m = n)$ تدعى المصفوفة المربعة وخلاف ذلك تكون مصفوفة مستطيلة $(m \neq n)$.

6-1-1- درجة المصفوفة

إذا كانت لدينا $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ فإن أبعاد المصفوفة m و n تسمى بدرجة المصفوفة.

- إذا كانت $m\neq n$ نقول أن المصفوفة من الدرجة $n\times m$.
- إذا كانت $m=n$ نقول أن المصفوفة من الدرجة n.
- إذا كانت $m>n$ نقول أن المصفوفة طويلة.
- إذا كانت $m<n$ نقول أن المصفوفة عريضة.

أمثلة

المصفوفة A من الدرجة الثانية

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 3\end{bmatrix}_{2\times 2}$$

المصفوفة B من الدرجة (2×4)

$$B=\begin{bmatrix}4 & 5 & 6 & 8\\ -1 & -2 & 3 & 4\end{bmatrix}_{2\times 4}$$

ملاحظة

جميع عناصر المشكلة لمصفوفة لها كناية واحدة حيث لا يجوز أن تحتوي مصفوفة واحدة على عناصر لها كنايات مختلفة كأن تدل بعض العناصر على قيمة المبيعات و بعضها الآخر على تكاليف الإنتاج.

6-1-2- أنواع المصفوفات

أ- المصفوفة القطرية

هي مصفوفة مربعة الشكل، جميع عناصرها معدومة ما عدا عناصر القطر الرئيسي.

$$A=\begin{bmatrix}4&0&0\\0&6&0\\0&0&2\end{bmatrix}\rightarrow \quad \begin{matrix}a_{ij}=0\rightarrow i\neq j\\ a_{ij}\neq 0\rightarrow i=j\end{matrix}$$

ب - المصفوفة السلمية

هي مصفوفة هي مصفوفة مربعة الشكل قطرية جميع عناصر القطر الرئيسي متساوية.

$$A=\begin{bmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{bmatrix}\rightarrow \quad \begin{matrix}a_{ij}=i\neq j\\ a_{ij}=k\rightarrow i=j\end{matrix}$$

جـ- المصفوفة الأحادية

هي مصفوفة مربعة قطرية فيها جميع عناصر القطر الرئيسي تساوي واحد.

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\rightarrow \quad \forall(a_{ij})\in I_{(nn)}\begin{cases}a_{ij}=0\rightarrow i\neq j\\ a_{ij}=1\rightarrow i=j\end{cases}$$

وتلعب المصفوفة الأحادية في المصفوفات الدور نفسه الذي يلعبه الواحد في الأعداد الحقيقية، ونرمز للمصفوفة الأحادية بالرمز $(I_{n,n})$.

د- المصفوفة المثلثية إلى الأعلى

هي مصفوفة مربعة الشكل جميع عناصرها الواقعة تحت القطر الرئيسي معدومة.

$$A=\begin{bmatrix}6 & 1 & 2\\0 & 3 & 4\\0 & 0 & 7\end{bmatrix}\rightarrow a_{ij}=0\rightarrow i\rangle j$$

و- المصفوفة المثلثية إلى الأسفل

هي مصفوفة مربعة الشكل جميع عناصرها الواقعة فوق القطر الرئيسي معدومة.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\4 & 5 & 0\\9 & 10 & 11\end{bmatrix}\rightarrow a_{ij}=0\rightarrow i\langle j$$

ي- المصفوفة المتناظرة

هي مصفوفة مربعة الشكل عناصرها المتناظرة بالنسبة للقطر الرئيسي متساوية.

$$A=\begin{bmatrix}4 & 6 & -1\\6 & 3 & 5\\-1 & 5 & 2\end{bmatrix}\rightarrow a_{ij}=a_{ji}\rightarrow i\neq j$$

هـ- المصفوفة المتناظرة عكسيا

هي مصفوفة مربعة الشكل عناصرها المتناظرة فيها بالنسبة للقطر الرئيسي متساوية بالقيمة المطلقة ومتعاكسة في الإشارة، وعناصر القطر الرئيسي منعدمة.

$$A=\begin{bmatrix}0 & -4 & -6\\ 4 & 0 & -2\\ 6 & 2 & 0\end{bmatrix}\rightarrow \begin{array}{l} a_{ij}=-a_{ji}\rightarrow i\neq j\\ a_{ij}=0\rightarrow i=j\end{array}$$

ع- المصفوفة الماركوفية

هي مصفوفة مربعة الشكل كل عنصر من عناصرها a_{ij} يحقق المتراجحة التالية $0\leq a_{ij}\leq 1$. كما أن حاصل جمع عناصر أي عمود من أعمدتها يساوي الواحد.

$$A_{(n,n)}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0{,}5 & 0{,}2\\ 0{,}3 & 0 & 0 & 0{,}1\\ 0{,}4 & 0 & 0{,}5 & 0{,}3\\ 0{,}3 & 0 & 0 & 0{,}4\end{bmatrix}$$

6-1-3- أثر المصفوفة

إن حاصل جمع عناصر المصفوفة المربعة الواقعة على امتداد المستقيم الواصل بين a_{11} و a_{nn} [عناصر القطر الرئيسي] يسمى بالأثر الرئيسي للمصفوفة A ويرمز له بالرمز

$$tr\,A=\sum_{j=i=1}^{n} a_{ij}$$

مثال: لدينا المصفوفة التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & -4 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

فإن: $tr\, A = 1 + 6 + 2 = 9$

أما بالنسبة للمصفوفة المستطيلة لا يمكن تحديد أثرها، فإن أثرها غير معروف.

6-1-4- منقول المصفوفة

إذا كانت لدينا المصفوفة التالية:

$$A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ a_{m1} & \ldots\ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

فإن منقولها هو عبارة عن قلب أسطر إلى أعمدة و الأعمدة إلى أسطر ويرمز لها بالرمز $A`$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 4} \rightarrow A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 6 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{4\times 3}$$

*** خصائص منقول المصفوفة**

-1- منقول مصفوفة هو عبارة عن المصفوفة الأصلية $A = (A')'$.

-2- $(A+B)' = A' + B'$

-3- $(AB)' = A'B'$

-4- $(\lambda A)' = \lambda A'$ حيث λ عدد ما

-5- إذا كانت المصفوفة متناظرة فإن $A = A'$

6-2- العمليات على المصفوفات

نقصد بالعمليات على المصفوفات تلك العمليات التي نستطيع إجراءها على المصفوفات وهي: الجمع، الطرح، الضرب،.. الخ

6-2-1-جمع و طرح المصفوفات

أ- جمع المصفوفات

بفرض أن لدينا مصفوفتين $(A_{m,n})$ و $(B_{m,n})$

$$A_{m,n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots\cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad B_{(m,n)} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots\cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

فإن حاصل جمع هاتين المصفوفتين $A_{(m,n)} + B_{(m,n)}$ هو $C_{m \times n}$ أي:

$$C_{(m,n)} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

مما سبق نستنتج أنه يشترط لجمع مصفوفتين أن يكون لهما نفس الدرجة [لهما العدد نفسه من الأسطر والأعمدة].

$$A=\begin{bmatrix}1 & 4 & 6\\ 5 & -2 & 1\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 1 & 2\\ 0 & 5\end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix}3 & -2 & 1\\ 8 & 9 & 10\end{bmatrix}$$

نلاحظ أن (A + B) غير معرفة لأنهما مختلفان في درجة وكذلك B + C أما A + C فهي معرفة لأنهما من نفس الدرجة.

$$A+C=\begin{bmatrix}1 & 4 & 6\\ 5 & -2 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ 8 & 9 & 10\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1+3 & 4+2 & 6+1\\ 5+8 & -2+9 & 1+10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 6 & 7\\ 13 & 7 & 11\end{bmatrix}$$

تتصف عملية جمع المصفوفات بالخواص التالية:

- عملية الجمع تبديلية أي:

$$A_{(m,n)}+B_{(m,n)}=B_{(m\times n)}+A_{(m\times n)}$$

-عملية الجمع تجميعية أي:

$$A_{(m,n)}+\left(B_{(m\,n)}+C_{(m\,n)}\right)=\left(A_{(m\,n}+B_{(m\,n)}\right)+C_{m,n}$$

-المصفوفة الصفرية لها دور حيادي في جمع المصفوفات:

$$A_{(m,n)} + O_{(m,n)}) = A_{(m,n)}$$

- لكل مصفوفة عنصر نظير في عملية الجمع [المصفوفة الأصلية نفسها بعد تبديل إشارة عناصرها] أي:

$$A_{(m,n)} + \overline{A}_{(m,n)} = \overline{A}_{(m,n)} + A_{(m,n)} = O_{(M,n)}$$

حيث $(\overline{A}_{m,n})$ ترمز لنظير المصفوفة $A_{(m,n)}$

ب- طرح المصفوفات

تعالج هذه العملية بالخطوات نفسها التي تمت فيها معالجة عملية جمع المصفوفات وهذا بعد أخذ بعين الاعتبار الإشارة الجبرية.

مثال

إذا كانت لدينا بيانات حول المبيعات السنوية لإحدى الشركات بملايين الدينارات، حسب مناطق البيع I، II، III و حسب ثلاث أنواع من السلع A, B, C.

أنواع السلع	مناطق البيع		
	1	2	3
A	98	24	42
B	39	15	22
C	22	15	17

هي معطيات خاصة بالنسبة لــ t

$$D = \begin{bmatrix} 98 & 24 & 42 \\ 39 & 15 & 22 \\ 22 & 15 & 17 \end{bmatrix}$$

وإذا افترضنا أنه لدينا بيانات حول المبيعات الشركة بملايين الدينارات خلال السنة $t+1$ ممثلة في المصفوفة التالية:

$$E = \begin{bmatrix} 55 & 19 & 44 \\ 43 & 53 & 38 \\ 11 & 40 & 20 \end{bmatrix}$$

فإذا أردنا الحصول على قيمة المبيعات خلال السنتين t و $t+1$ حسب أنواع السلع ومناطق البيع يكون ممكن عن طريق جمع المصفوفات $D + E$

$$D + E = \begin{bmatrix} 98+55 & 24+19 & 42+44 \\ 39+43 & 15+53 & 22+38 \\ 22+11 & 15+40 & 17+20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 153 & 43 & 86 \\ 82 & 68 & 60 \\ 33 & 55 & 37 \end{bmatrix}$$

مثلا العنصر $a_{23} = 60$ يدل على قيمة المبيعات للشركة خلال السنتين t و $t + 1$ من السلعة B في نقطة رقم 3.

6-2-2- ضرب المصفوفات

-أ- ضرب مصفوفة في عدد حقيقي

لنفرض أن لدينا *المصفوفة* $A_{(m,\, n)}$ و *العدد الحقيقي* λ حيث $\lambda \neq 0$، *إن* حاصل ضرب *المصفوفة* $A_{(m,\, n)}$ بالعدد الحقيق λ والذي نرمز له بالرمز $\lambda \times A_{(m,\, n)}$ هو مصفوفة تنتج عن المصفوفة الأصلية بعد ضرب كل عنصر من عناصرها بالثابت λ:

$$A_{(m,n)} = \begin{bmatrix} a_{11} & .... & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & .... & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\lambda\ A_{(m,n)} = \begin{bmatrix} \lambda\ a_{11} & .... & \lambda\ a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda\ a_{m1} & .... & \lambda\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 5 & 10 & 9 \end{bmatrix} \qquad \lambda = 6$$

$$6\ A_{(2,3)} = \begin{bmatrix} 6\times4 & 6\times6 & 6\times1 \\ 5\times6 & 10\times6 & 9\times6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 36 & 6 \\ 30 & 60 & 54 \end{bmatrix}$$

نفرض أن لدينا المصفوفتين $A_{(m,n)}$ و $B_{(m,n)}$ و $\lambda, \alpha \in IR$ فان عملية ضرب المصفوفة بعدد حقيقي تتمتع بالخواص التالية:

$$(\lambda+\alpha)(A_{(m,n)}) = \alpha\, A_{(m,n)} + \lambda\, A_{(m,n)}$$
$$\lambda\left[A_{(m,n)} + B_{(m,n)}\right] = \lambda\, A_{(m,n)} + \lambda\, B_{(m,n)}$$
$$I_{(m,n)} \times A_{(m,n)} = A_{m.n}$$
$$O_{(m,n)} \times A_{(m,n)} = O_{(m,n)}$$

حالة خاصة أن ناتج ضرب المصفوفة $A_{m,n}$ بالعدد الحقيقي $\lambda = -1$ هو نظير المصفوفة $A_{m,n}$ والذي نرمز له بالرمز $A'_{(m,n)}$.

-ب- ضرب مصفوفة بشعاع من اليمين

لتكن المصفوفة $A_{(m,n)}$ على النحو التالي:

$$A_{(m,n)} = \begin{bmatrix} a_{11} & .... & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & .... & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

والشعاع الشاقولي $B_{(n,1)}$

$$B_{(n,1)} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

حيث $i = 1, 2, \ldots\ldots m$ و $j = 1, 2, \ldots n$

إن ناتج عملية ضرب المصفوفة بالشعاع الشاقولي والذي نرمز له بالرمز $Z_{(m,1)}$ أي أن:

$$A_{(m,n)} \times B_{(n,1)} = Z_{(m,1)}$$

تتم عملية الضرب بضرب عناصر كل سطر من اسطر المصفوفة بعناصر الشعاع الشاقولي على التقابل [حيث يمكن اعتبار أن كل سطر من أسطر المصفوفة هو بمثابة شعاع أفقي]، وبذلك تؤول عملية ضرب مصفوفة بشعاع من اليمين لعملية ضرب شعاع أفقي بشعاع شاقولي. ونلاحظ أن عملية الضرب ممكنة [كون أن الدليلين المتجاورين متساويان] أي أن:

$$A_{(m,n)} \cdot B_{m,n} = \begin{bmatrix} a_{11} & .... & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & .... & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} \begin{bmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix}_{n\times 1} = \begin{bmatrix} Z_{11} \\ \vdots \\ Z_{m1} \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 58 & 52 & 1 \\ 26 & 58 & 3 \\ 8 & 12 & 9 \end{bmatrix}_{3\times 3} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

$$A_{3\times 3} \times B_{3\times 1} = \begin{bmatrix} 58\times 1 + 52\times 2 + 3\times 1 \\ 26\times 1 + 58\times 2 + 3\times 9 \\ 8\times 1 + 12\times 2 + 3\times 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 165 \\ 151 \\ 59 \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

ملاحظة

عملية ضرب المصفوفة بشعاع أفقي من اليمين مستحيلة أي $B \times A$ غير معرفة.

-جـ- ضرب مصفوفة بشعاع من اليسار

لتكن لدينا $A(m,n)$ على النحو التالي:

$$A_{(m,n)}=\begin{bmatrix} a_{11} & .... & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & .... & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

والشعاع الأفقي

$$B_{(1,m)}=\left[b_{11}\ b_{12},.............b_{1m}\right]$$

إن ناتج عملية ضرب الشعاع الأفقي بالمصفوفة من اليسار والذي نرمز له بالرمز $Z_{(1,\,n)}$ أي:

$$B_{(1,m)} \times A_{(m,n)} = Z_{(1,n)}$$

هو شعاع أفقي نحصل عليه وذلك بضرب الشعاع $B_{(1\,,n)}$ بكل عمود من أعمدة المصفوفة $A_{(m,\,n)}$ [حيث يمكن اعتبار المصفوفة وكأنها أشعة شاقولية] وبذلك تؤول عملية ضرب المصفوفة من اليمين إلى عملية ضرب شعاع أفقي بشعاع شاقولي. ونلاحظ أن عملية الضرب ممكنة

لتساوي الدليلين المتجاورين وناتج عملية الضرب ليس إلاّ الشعاع الأفقي $Z_{(1,n)}$

أي:

$$B_{(1,n)} \times A_{(m,n)} = [b_{11}, b_{12}, \ldots\ldots\ldots b_{1n}]_{(1,m)} \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}_{(m,n)}$$

$$= [Z_{11}, Z_{12}, \ldots\ldots\ldots Z_{1n}]_{(1,n)}$$

مثال:

$$B_{(1,3)} = [1 \quad 2 \quad 3] \qquad A_{(3,3)} = \begin{bmatrix} 58 & 26 & 8 \\ 52 & 58 & 12 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

$$B \times A = [1 \quad 2 \quad 3]_{1\times 3} \begin{bmatrix} 58 & 26 & 8 \\ 52 & 58 & 12 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}_{3\times 3} = [165 \quad 151 \quad 59]_{1\times 3}$$

د- ضرب مصفوفتين

لا تختلف عملية ضرب مصفوفتين ببعضها البعض عن ضرب المصفوفة بالشعاع [سواء كان من اليمين أم من اليسار] شريطة أن تكون عملية الضرب ممكنة. فإذا فرضنا أن لدينا:

$$A_{(m,n)} \times B_{(n,p)} = C_{(m,p)}$$

$$A_{(3,4)} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}_{3\times4} \qquad B_{(4,2)} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 0 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}_{4\times2}$$

$$A \times B = C_{(3,2)} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 4 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}_{3\times2}$$

أي

$$A = \left(a_{ij}\right)_{m.n} \times \ B = \left(b_{ij}\right)_{n.p} = C = \left(c_{ij}\right)_{(m.p)}$$

نحصل على درجة المصفوفة الجديدة بوجود توافق بين المصفوفتان A و B

ملاحظة

الشرطة الأساسي لضرب مصفوفتان A و B أي الحصول على الجذاء $A \times B$ هو أن تساوي الأعمدة في المصفوفة A مع عدد الأسطر في

المصفوفة B. فإذا لم يتحقق هذا الشرط نقول أن المصفوفتان غير متوافقتان للضرب وأن الجداء لـــ $A \times B$ غير معرف.

و- خواص ضرب المصفوفات

-*- عملية الضرب في المصفوفات ليست تبديلية بصفة عامة

$$A \times B \neq B \times A$$

-*-عملية ضرب المصفوفات هي تجميعية

$$\left(A_{(m,n)} \times B_{(n,p)}\right) \times C_{(p,q)} = A_{(m,n)} \times \left(B_{(m,p)} \times C_{(p,q)}\right) = A_{(m,n)} \times B_{(m,p)} \times C_{(p,q)}$$

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \times B \times C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 4} \times \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}_{4\times 2} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

$$= \begin{bmatrix} 19 & 13 & 32 \\ 17 & 7 & 20 \\ 26 & 13 & 39 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

-*- عملية ضرب مصفوفتين قطريتين هي تبديلية وناتج ضرب هو مصفوفة قطرية عناصرها هي جذاء عناصر المصفوفتين القطريتين.

-*- إن جذاء أية مصفوفة [على أن تكون مصفوفة صفرية] بالمصفوفة الصفرية [سواء كانت عملية الضرب من اليمين أو من اليسار] هو مصفوفة صفرية أي أن:

$$O_{(m,n)} \cdot A_{(n,p)} = O_{(m,p)}$$

$$A_{(m,n)} \cdot O_{(n,p)} = O_{(m,p)}$$

ملاحظة

من الممكن أن نجد جذاء مصفوفتين [كل منها ليست بالمصفوفة الصفرية] مساويا المصفوفة المعدومة.هذه الخاصة لا تنطبق على مجموعة الأعداد الحقيقية.

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A.B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بالرغم من $B \neq 0$ و $A \neq 0$

-*- إن جذاء أية مصفوفة الأحادية هو مصفوفة الأصلية أي:

$$A_{(m,n)} \times I_{(n,n)} = A_{(m,n)}$$
$$I_{(m,m)} \times A_{(m,n)} = A_{(m,n)}$$

-*- إن ما يمكن إجراؤه من اختصار أثناء عملية ضرب الأعداد الحقيقية لا يمكن إجراؤه بالنسبة للضرب المصفوفات، فإذا فرضنا أن لدينا:

$$A_{(m,n)} \quad , \quad B_{(n,p)} \quad , \quad C_{(n,p)}$$
$$A_{(m,n)} \times B_{(n,p)} = A_{(m,n)} \times C_{(n p)}$$

فهنا لا يعني بالضرورة تحقق العلاقة التالية أن:

$$B_{(n,p)} = C_{(n,p)}$$

لنفرض أن لدينا:

$$A_{(2,2)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad B_{(2,2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad C_{(2,2)}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A_{(2,2,} \times B_{(2,2)} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} \qquad A_{(2,2)} \times C_{(2,2)} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A_{(2,2)} \times B_{(2,2)} = A_{(2,2)} \times C_{(2,2)}$$

ومع كل هذا فلا نستطيع اختصار طرفي العلاقة السابقة على $A_{(2,2)}$ وذلك لأن: $B_{(2,2)} \neq C_{(2,2)}$

6-2-3- قوى مصفوفة

من شرط توافق مصفوفتين للضرب نجد أن المصفوفة تكون متوافقة مع نفسها بالنسبة للضرب إذا وفقط إذا كانت هذه المصفوفة مربعة يسمى جداء $(A \times A)$ بمربع المصفوفة و يكتب A^2.

$$A^2 = A \times A$$

$$A^3 = A^2 \times A$$

$$A^n \times A^m = A^{n+m}$$

$$(A^n)^m = A^{n.m}$$

*** خصائص قوى مصفوفة**

- إذا رفعت المصفوفة إلى قوة ما ولتكن A^n حيث n عدد صحيح وكانت $A^n = 0$ نقول أن المصفوفة عديمة القوى من المرتبة n.

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

المصفوفة A هي مصفوفة عديمة القوى من المرتبة (3).

- إذا رفعت المصفوفة A إلى قوى وبقيت المصفوفة A على حالها ولم تتغير $A^n = A$ نقول أن هذه المصفوفة مصفوفة عقيمة.

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

إذن المصفوفة A عقيمة.

6-3-المحددات

يستخدم مصطلح المحدد للمصفوفات المربعة فقط وهو عبارة عن مجموع جبري لأقطار المصفوفة المربعة، ونصل من خلال هذا المجموع إلى قيمة عددية. ويتحدد أهم شرط لحساب المحدد في أن تكون المصفوفة مربعة حيث يعتبر شرط ضروري. ولحساب قيمة المحدد هناك طريقتان:

- **الطريقة الأولى:** هي طريقة المجموع الجبري للأقطار أو تسمى طريقة الأقطار وهي ممكنة للمصفوفات المربعة التي لا يزيد أبعادها عن 3×3) وقوامها أن المحدد هو حاصل مجموع ضرب عناصر القطر أو الأقطار الرئيسية مطروحا منها مجموع ضرب القطر أو الأقطار الثانوية.

- **الطريقة الثانية: مفكوك عبر المرافق الجبرية**

ينتج عن عملية فك المحدد مفهومين أساسيين [المحدد الصغير M_{iJ} والمحدد المرافق C_{iJ}].

* **المحدد الصغير** M_{iJ}

نحصل على المحدد الصغير M_{iJ} للعنصر a_{iJ} من المحدد الكبير $|A|$ بعد حذف عناصر السطر i وعناصر العمود j.

إذا كان المحدد:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

فإن المحدد الصغير للعنصر a_{11} هو:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

وهكذا بالنسبة لبقية المحددات الصغيرة الأخرى.

*** المحدد المرافق** C_{ij}

إن المحدد المرافق للعنصر a_{ij} هو عبارة عن:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

من المحدد $|A|$ يمكن أن نحدد المحددات المرافقة للعناصر مثلا بالنسبة لـــ a_{11}

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

6-3-1- خواص المحددات

* محدد منقول المصفوفة يساوي إلى محدد المصفوفة الأصلية

$$|A'| = |A|$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2$$

$$|A'| = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 2$$

بمعنى إذا تحولت الأسطر إلى أعمدة والأعمدة إلى أسطر في مصفوفة مربعة فان قيمة المحدد لا تتغير.

*- تبادل أوضاع أي صفين أو عمودين يغير إشارة المحدد فقط.

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2$$

*- إذا كانت جميع عناصر السطر أو العمود مشتملة على حدين فان المحدد يمكن كتابته على شكل محددين:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + k \\ a_{21} & a_{22} + S \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & k \\ a_{21} & S \end{vmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1+1 \\ -1 & 4+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (12+1) + (6+1) = 20$$

$|A| = 20$ ـإ

*- محدد المصفوفة المثلثية إلى الأعلى أو إلى الأسفل يساوي جداء عناصر القطر الرئيسي للمحدد.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -8$$

*- إذا تساوى سطرين أو عمودين تكون قيمة المحدد مساوية للصفر

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

أيضا حالة تناسب سطرين أو عمودين فإن المحدد يساوي صفر

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

لأن السطر الثاني هو ضعف السطر الأول.

*- ضرب أي سطر أو عمود في عدد ثابت $k \neq 0$ سيغير قيمة المحدد بمقدار العدد نفسه

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} .4 = 8$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \times 4 = \begin{vmatrix} 4 \times 3 & 1 \\ 4 \times 4 & 2 \end{vmatrix} = 8$$

*- إذا كانت جميع عناصر أحد الأسطر أو أحد الأعمدة عبارة عن أصفار فان قيمة المحدد تساوي صفر.

*- إذا ضربت جميع عناصر محدد من الدرجة $n \times n$ بعدد ما $k \neq 0$ فان قيمة المحدد تضرب بذلك العدد مرفوع إلى قوة n أي k^n.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 20$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3\times1 & 4\times3 & -3\times3 \\ -1\times3 & 1\times3 & 2\times3 \\ 2\times3 & 3\times3 & -1\times3 \end{vmatrix} = 3^3 \times 20 = 540$$

*- إذا أضفنا إلى عناصر أحد الأسطر أو عمود المحدد كميات متناسبة مع عناصر سطر آخر أو عمود آخر فان قيمة المحدد لا تتغير.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 20$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ -1+2 & 1+8 & 2-6 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 20$$

يمكن البرهان على هذه الخاصية

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

فإذا قمنا بإضافة إلى عناصر السطر الأول مضاعفات من λ عناصر السطر الثاني نحصل على مصفوفة جديدة

$$|B| = \begin{vmatrix} a_{11} + \lambda\, a_{21} & a_{12} + \lambda\, a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

وفقا للخاصية المذكورة أعلاه فإن:

$$|B| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda\, a_{21} & \lambda\, a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

نلاحظ أن المحدد المضروب في λ يساوي صفر لأن فيه سطرين متساويين وهذا وفق الخاصية (5) وبالتالي فان: $|B| = |A|$

6-3-2-العمليات الجبرية على المحددات

أ- جمع و طرح المحددات

على خلاف جمع وطرح المصفوفات فان جمع وطرح محددين له وجود حتى لو لم يكن المحددين من نفس الدرجة لأن المحدد عبارة عن قيمة عددية.

$$|A| + |B| \neq |A + B|$$

$$|A| - |B| \neq |A - B|$$

لأن الجمع والطرح يتم فقط بالنسبة لقيمة هذين المحددين $|A| \pm |B| = \alpha$

ب- ضرب المحددات

ضرب المحددات له وجود حتى ولو لم تكن هذه المحددات من نفس الدرجة و ضرب المحددات لا يتم لقيمة هذه المحددات.

$$|A| \times |B| = |B| \times |A| = \gamma$$

وفي حالة أن تكون A و B من نفس الدرجة فإن:

$$|A| \times |B| = |B| \times |A| = |A \times B| = |B \times A|$$

جـ- مفهوم معكوس المصفوفة

نعلم أنه يمكن جمع وطرح المصفوفات وكذلك ضربها تحت شروط معينة أما قسمتها فلا تتم بنفس الطريقة الأعداد التي يمكن التعبير عنها $\left(\frac{a}{b}\right)$ بالمقدار $b^{-1}a$ أو $a\,b^{-1}$، إلاّ أن الأمر يختلف بالنسبة لضرب المصفوفتين $(b^{-1}a)$ ليس بالضرورة نفس حاصل ضرب $(a\,b^{-1})$، ولهذا نستخدم تعبير معكوس المصفوفة الذي يتطلب شرط مهما وهو أن:

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I$$

هذا الشرط يعني استثناء لقاعدة ضرب المصفوفات لكونها لا تخضع لعملية الإبدال في الضرب، لكن تحت مواصفات خاصة هي:

1- إن تكون المصفوفة المراد استخراج معكوسها مربعة.

2- ليس لكل مصفوفة مربعة معكوس، فالبرغم من كونه شرطا ضروريا لكنه غير كاف والشرط الكافي أن تكون المصفوفة نظامية [أي محددها لا يساوي صفر $|A| \neq 0$].

3- مقلوب المصفوفة المربعة النظامية وحيد و مميز.

4-المصفوفة A^{-1} تحقق العلاقة التالية:

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I$$

-5- محدد مقلوب المصفوفة A يساوي إلى مقلوب محدد المصفوفة الأصلية أي:

$$\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|} \Rightarrow \left|A^{-1}\right| \times |A| = I$$

من خلال هذه الخاصية يمكن التأكد بأن المصفوفة الشاذة [$|A| = 0$] ليس لها مقلوب. فإذا كانت المصفوفة A شاذة أي $|A| = 0$ وحسب الخاصية (5) لدينا $\left|A^{-1}\right| \times |A| = I$ ولما كان $|A| = 0$ فإن :

$$\left|A^{-1}\right| \times |A| = 0$$

$0 = I$ ← مستحيلة

6- مقلوب المقلوب هو عبارة عن المصفوفة الأصلية $A = (A^{-1})^{-1}$

7- مقلوب المصفوفة المربعة النظامية هي أيضا مصفوفة مربعة نظامية

8- مقلوب منقول المصفوفة يساوي إلى منقول مقلوبها أي:

$$(A')^{-1} = (A^{-1})'$$

9- إذا كانت المصفوفة A متناظرة فان مقلوبها A^{-1} أيضا مصفوفة متناظرة.

10- مقلوب جداء عدة مصفوفات مربعة نظامية من نفس الدرجة يساوي إلى جداء مقلوباتها بترتيب معكوس:

$$(AB)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$$
$$(ABC)^{-1} = C^{-1} \times B^{-1} \times A^{-1}$$

للوصول إلى معكوس المصفوفة عن طريق المصفوفة المساعدة نتبع الخطوات التالية:

-*- التأكد من أن قيمة المحدد المصفوفة المربعة لا تساوي صفر

-*- نستخرج مصفوفة المرافقات للمصفوفة الأصلية [المصفوفة المساعدة]

-*- نقسم مصفوفة المرافقات بعد تدويرها على قيمة المحدد فتظهر لنا مصفوفة جديدة تمثل A^{-1} بالشكل التالي:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adjA$$

مثال: أحسب معكوس المصفوفة A التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 4 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

بتطبيق العلاقة $A^{-1} = \frac{1}{|A|} adjA$

1- نحسب $|A|$

$$|A| = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 1 & \vdots & 6 & 3 \\ 1 & 4 & -2 & \vdots & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 5 & \vdots & 4 & -1 \end{vmatrix} = 52$$

2- نحسب مصفوفة المرافقات بأخذ إشاراتها الجبرية

$$C(A) = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & +1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 6 & +1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$C(A) = \begin{bmatrix} 18 & -13 & -17 \\ -16 & 26 & 18 \\ -10 & 13 & 21 \end{bmatrix}$$

3- نجد مبدلة مصفوفة المرافقات

$$C' = adjA = \begin{bmatrix} 18 & -16 & -10 \\ -13 & 26 & 13 \\ -17 & 18 & 21 \end{bmatrix}$$

4- وللوصول إلى المعكوس يكفي أن نقسم مبدلة مصفوفة المرافقات على قيمة محدد المصفوفة وفق الصيغة التالية:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adjA$$

ولهذا يكون المعكوس عبارة عن مصفوفة مميزة ووحيدة وهي لا تماثل عملية القسمة في نظام الأعداد.

$$A^{-1}=\frac{1}{52}\begin{bmatrix}18 & -16 & -10\\ -13 & 26 & 13\\ -17 & 18 & 21\end{bmatrix}$$

6-4- تطبيق إقتصادي

6-4-1- نموذج توازن السوق ذي ثلاث سلع

تأخذ دوال العرض ولطلب الشكل التالي

السلعة (1)

$$Q_{d1}=a_0+a_1P_1+a_2P_2+a_3P_3$$
$$Q_{s1}=\alpha_0+\alpha_1P_1+\alpha_2P_2+\alpha_3P_3$$

السلعة (2)

$$Q_{d2}=b_0+b_1P_1+b_2P_2+b_3P_3$$
$$Q_{s2}=\beta_0+\beta_1P_1+\beta_2P_2+\beta_3P_3$$

السلعة (3)

$$Q_{d3}=C_0+C_1P_1+C_2P_2+C_3P_3$$
$$Q_{s3}=\gamma_0+\gamma_1P_1+\gamma_2P_2+\gamma_3P_3$$

من شرط التوازن:

$$Q_{d1}=Q_{s1}$$
$$(a_0-\alpha_0)+P_1(a_1-\alpha_1)+P_2(a_2-\alpha_2)+P_3(a_3-\alpha_3)=0 \qquad (6-1)$$
$$Q_{d2}=Q_{s2}$$
$$(b_0-\beta_0)+P_1(b_1-\beta_1)+P_2(b_2-\beta_2)+P_3(b_3-\beta_3)=0 \qquad (6-2)$$
$$Q_{d3}=Q_{s3}$$
$$(C_0-\gamma_0)+P_1(C_1-\gamma_1)+P_2(C_2-\gamma_2)+P_3(C_3-\gamma_3)=0 \qquad (6-3)$$

ثلاث معادلات بثلاث مجاهيل يمكن استخدام جبر المصفوفات:

$$P_1(a_1-\alpha_1)+P_2(a_2-\alpha_2)+P_3(a_3-\alpha_3)=\alpha_0-a_0$$
$$P_1(b_1-\beta_1)+P_2(b_2-\beta_2)+P_3(b_3-\beta_3)=\beta_0-b_0$$
$$P_1(C_1-\gamma_1)+P_2(C_2-\gamma_2)+P_3(C_3-\gamma_3)=\gamma_0-C_0$$

$$\begin{bmatrix} a_1-\alpha_1 & a_2-\alpha_2 & a_3-\alpha_3 \\ b_1-\beta_1 & b_2-\beta_2 & b_3-\beta_3 \\ C_1-\gamma_1 & C_2-\gamma_2 & C_3-\gamma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0-a_0 \\ \beta_0-b_0 \\ \gamma_0-C_0 \end{bmatrix} \qquad (6-4)$$

لحساب قيم (P_1 و P_2 ، P_3) أي مصفوفة الشعاع X ، نطبق طريقة كرامر التي تحقق جملة المعادلات في آن واحد.

مثال:

يمثل للنموذج التالي نموذجا توازنيا لسوق تحوي ثلاث سلع.

$$Q_{d1}=23-5P_1+P_2+P_3 \qquad Q_{s1}=-8+6P_1$$
$$Q_{d2}=15+P_1-3P_2+2P_3 \qquad Q_{S2}=-11+3P_2$$
$$Q_{d3}=19+P_1+2P_2-4P_3 \qquad Q_{S3}=-5+3P_3$$

حدد الأسعار والكميات التوازنية باستخدام جبر المصفوفات من شرط التوازن:

$$Q_{d1}=Q_{S1}\Rightarrow Q_{d1}-Q_{S1}=0$$
$$31=11P_1-P_2-P_3 \qquad (6-5)$$

$$Q_{d2} = Q_{S2} \Rightarrow Q_{d2} - Q_{S2} = 0$$
$$26 = -P_1 + 6P_2 - 2P_3 \qquad (6-6)$$

$$Q_{d3} = Q_{S3} \Rightarrow Q_{d3} - Q_{S3} = 0$$
$$24 = -P_1 - 2P_2 + 7P_3 \qquad (6-7)$$

يمكن أن نشكل المصفوفات من خلال المعادلات الثلاثة السابقة:

$$\begin{bmatrix} 11 & -1 & -1 \\ -1 & 6 & -2 \\ -1 & -2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 \\ 26 \\ 24 \end{bmatrix} \qquad (6-8)$$

ولحساب عناصر الشعاع x نستخدم طريقة كرامر نحصل على:

$$\overline{P}_1 = 4 \ ، \overline{P}_2 = 7 \ ، P_3 = 6$$

نعوض عن $\overline{P}_1$و $\overline{P}_2$و $\overline{P}_3$ في دوال العرض أو الطلب نحصل على الكميات التوازنية

$$Q_{S1} = Q_{d1} = 16$$
$$Q_{S2} = Q_{d2} = 10$$
$$Q_{S3} = Q_{d3} = 13$$

6-4-2- النموذج التوازني للدخل الوطني بوجود قطاع حكومي

يعتبر هذا النموذج أقرب إلى الواقع ويتم إدخال الإنفاق الحكومي (G) والضرائب T. وتدخل الضرائب في النموذج عن طريق دالة الاستهلاك $C(y)$. نفترض أن الإنفاق الحكومي (G) متغير خارجي وهو مستقل عن الدخل. ونعلم أن هناك جزء كبير من الدخل الوطني يتجه إلى الحكومة على شكل ضرائب، ولذلك فالاستهلاك يعتمد على الدخل بعد اقتطاع الضرائب أي على الدخل الممكن التصرف فيه، ويتم الحصول على الدخل الممكن التصرف فيه Y_d بإنقاص الضرائب من الدخل Y أي:

$$Y_d = Y - \mathrm{T} \qquad (6-9)$$

وتتحدد دالة الاستهلاك بالصيغة التالية:

$$C = f(y) = a + b[y - \mathrm{T}] \qquad (6-10)$$

تعتمد الضرائب بشكل أساسي على الدخل و لهذا تأخذ دالتها الشكل التالي:

$$\mathrm{T} = \mathrm{T}_0 + t(y) \qquad 0 \langle t \langle 1 \qquad (6-11)$$

حيث T_0 الضريبة المستقلة عن الدخل والتي تدخل كمتغير خارجي و t معدل الضريبة على الدخل.

نفترض أن النموذج لا يحوي على ضرائب المستقلة عن الدخل T_0 وبالتالي تكون دالة الضريبة $T=t\,y$.

يتحدد مستوى التوازني للدخل بتعادل العرض الكلي الممثل بالدخل Y مع الطلب الكلي الذي يساوي مجموع الاستهلاك زائد الاستثمار زائد الإنفاق الحكومي $(C+I+G)$.

يمكن صياغة النموذج التوازني للدخل الوطني بوجود قطاع حكومي بالمعادلات التالية:

$$Y = C + I + G \qquad (6-12)$$

$$C = a + b(y - \mathrm{T}) \qquad (6-13) \qquad a \rangle 0 \quad , 0 \langle b \langle 1$$

$$\mathrm{T} = ty \qquad (6-14) \qquad 0 \langle t \langle 1$$

$$I = I_0 \qquad (6-15) \qquad I_0 \rangle 0$$

$$G = G_0 \qquad (6-16) \qquad G_0 \rangle 0$$

حيث (Y, C, T) متغيرات داخلية (I, G) متغيرات خارجية مستقلة.

نعوض عن (6-16) و(6-15) و(6-14) في المعادلة (6-12) نحصل على:

$$\begin{aligned} Y &= C + I + G \\ &= a + b(Y - T) + I_0 + G_0 \\ &= a + b\left[Y - tY\right] + I_0 + G_0 \\ &= a + bY - btY + I_o + G) \end{aligned}$$

$$Y - bY + btY = a + I_0 + G_0$$

$$Y\left[1 - b + bt\right] = a + I_0 + G_0$$

$$\overline{Y} = \frac{a + I_0 + G_0}{1 - b + bt} \qquad (6-17)$$

نعوض (6-17) في (6-14) نحصل على:

$$\overline{T} = t.\overline{Y}$$

$$= t\left[\frac{a + I_0 + G_0}{1 - b + t}\right] \qquad (6-18)$$

نعوض عن (6-17) و (6-18) في (6-13) نحصل على:

$$\overline{C} = \frac{a - b(1-t)(I_0 + G_0)}{1 - b + bt} \qquad (6-19)$$

وبما أن $a, b, t > 0$ وكذلك $I_0, G_0 > 0$ فإن $\overline{T}, \overline{C}, \overline{Y}$ هي قيم موجبة.

نقوم بحل النموذج التوازني وفق المعادلات للدخل باستخدام جبر المصفوفات.

نعوض عن قيم I و G في المعادلة (6-12)

$$Y = C + I_0 + G_0 \qquad (6-20)$$

$$C = a + b(Y - T) \qquad (6-21)$$

$$T = tY \qquad (6-22)$$

نكتب هذه المعادلات بالشكل التالي حتى نتمكن من صياغتها على شكل مصفوفات عددية.

$$Y - C = I_0 + G_0$$
$$-bY + C + bT = a$$
$$-tY + T = 0$$
$$1Y - 1C + 0T = I_0 + G_0$$
$$-bY + 1C + bT = a$$
$$-tY + 0C + 1T = 0$$

نمثل المعادلات بشكل مصفوفات

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -b & 1 & b \\ -t & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ C \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_0 + G \\ a \\ 0 \end{bmatrix}$$

وباستخدام طريقة كرامر يمكن الحصول على قيمة المتغيرات $\left[\bar{Y}, \bar{C}, \bar{T}\right]$ وهذا بعد التأكد أن $|A| \neq 0$ أو باستخدام طريقة المصغرات من خلال العلاقة التالية:

$$A^{-1}AX = A^{-1}.B$$
$$X = A^{-1}B$$

6-4-3- نموذج المدخلات والمخرجات

تأتي الفكرة الأساسية لهذا النموذج في تحليل التوازن العام في علاقات الإنتاج بصورة تطبيقية. فيتم من خلال هذا التحليل تتبع آثار القرارات الفردية للوحدات الإنتاجية على باقي نواحي الاقتصاد الوطني.

بالرغم من اهتمام نظرية المدخلات والمخرجات بجانب الإنتاج في الاقتصاد أولا، إلاّ أنها تهتم بفكرة التوازن العام حيث تحاول الأخذ بعين الاعتبار تداخل وتشابك خطط الإنتاج ونشاطات الصناعات المختلفة التي تكوّن الاقتصاد الوطني.

هذا الترابط ينبع من حقيقة أن كل صناعة تستخدم منتجات الصناعات الأخرى كاستخدامات وغالبا ما تستخدم ناتجها بدوره من كل أو بعض المنتجين الآخرين كعامل من عوامل إنتاجهم، ولهذا وفق ليونتيف أدرجت القطاعات أفقيا تارة وعموديا تارة أخرى.

- من الترتيب الأفقي نحصل على معادلات يطلق عليها تسمية المعادلات المتوازنة وهي تمثل توزيع منتجات قطاع على شتى قنوات الاستهلاك الوسيط والاستهلاك النهائي وتمثل هذه المعادلات بالأساس توازن العرض من منتجات كل قطاع مع الطلب على منتجاته.

- من الترتيب العمودي نحصل على معادلات التكاليف وهي عبارة عن قيمة استهلاك القطاع موضع البحث من منتجات القطاعات الأخرى بالإضافة إلى القيمة المضافة التي يولدها القطاع خلال العمليات الإنتاجية. ومجموع القيمتين عبارة عن قيمة الإنتاج الإجمالية للقطاع موضوع البحث. وبمعادلة السطر بالعمود الخاص بكل قطاع يقف ليونتيف على التبادل بين كل قطاع مع القطاعات الأخرى.

أ- خصائص جدول المدخلات –المخرجات

يركز تحليل هذا الجدول على ظاهرة التوازن العام، حيث يأخذ هذا التحليل في الاعتبار علاقات التشابك المتبادلة بين خطوط الإنتاج والأنشطة في الصناعات المختلفة المكونة للاقتصاد الوطني وينشا هذا الاعتماد من ضرورة أنه:

* كل صناعة تستخدم منتجات صناعة أخرى كمادة أولية لها، وأن منتجات هذه الصناعة تستخدم بدورها كعامل إنتاج في صناعات أخرى وأحيانا بالصناعات التي أمدتها بالمواد الأولية.

* تعالج علاقات الإنتاج فقط والمشكلة التي يعالجها في المقام الأول هي تكنولوجية وتتلخص في محاولة تحديد ما يمكن إنتاجه وكمية السلع الوسيطة التي يجب استخدامها في العملية الإنتاجية وذلك بغرض معرفة الكميات المتاحة من موارد الإنتاج.

وتتمثل المشكلة الأساسية في تحديد ما تبقى للطلب النهائي [الاستهلاك] الذي يتكون من: الاستهلاك الخاص، الاستهلاك العام، الاستثمارات، الصادرات ومقدار ما يستخدم من كل سلعة في العملية الإنتاجية من اجل الحصول على المنتجات الصافية.

*يستخدم هذا النموذج في التنبؤ بمتطلبات الإنتاج اللازمة لإشباع الطلب.

*يعطي هذا النموذج صورة مفصلة عن هيكل الاقتصاد الوطني والتي تستخدم في إعداد الحسابات الوطنية.

ب- فرضيات النموذج

يستند تحليل نموذج المدخلات - المخرجات على عدة فرضيات فرضتها البيانات التطبيقية ومشاكل الحسابات وأهمها:

* عدم وجود منتجات مشتركة أي أن كل قطاع ينتج منتوجا متجانسا.
* كل صناعة تستخدم معدل ثابت من المنتج [تشتمل على عدة سلع تنتج بنسب ثابتة] لإنتاج منتجاتها.
* ثبات نسب عناصر الإنتاج، وهذا يعني أن كل عملية إنتاجية تستخدم مستلزمات إنتاج بنسب ثابتة وتزداد هذه النسب بمعدل اقل من نسب زيادة الإنتاج. ومن خلال هذا الافتراض فان عوامل الإنتاج مكملة لبعضها البعض بحيث لا يمكن إحلال أحدهم محل الأخر ولو في مجال ضيق وهذا خلافا لفرضية ثبات الغلة مع الحجم الذي يسمح بإحلال احد عوامل الإنتاج بآخر.
* يفترض بناء النموذج (I-O) معرفة الطلب النهائي.
* ثبات الأسعار.
* زيادة الطاقة الإنتاجية في إحدى القطاعات بنسب معينة تؤدي إلى زيادة مشترياته من القطاعات الأخرى بنفس النسبة.

من هذه الافتراضات نجد أن لإنتاج وحدة من السلعة J فان المدخل الذي يحتاجه من i من السلع يجب أن يكون مقدار ثابت والذي يرمز له بـــ a_i ز وبصورة أخرى لإنتاج وحدة من السلعة j يتطلب كمية من:

a_{1j} ← من السلعة الأولى

a_{2j} ← من السلعة الثانية

a_{nj} ← من السلعة n

حيث أن تركيب الرمز a_{ij} يعني أن:

i ← تشير إلى المدخل

j ← تشير إلى المخرج

وبالتالي فان a_{ij} تشير إلى كم من i من السلعة يستخدم في إنتاج وحدة واحدة من j من السلعة.

فالرمز a_{ij} يشير إلى معامل المدخل «coefficient Input» لـ n من الصناعات، فإذا رتبنا معامل المدخل في المصفوفة $A = (a_{ij})$ كما يلي:

المدخل Input	المخرج OutPut				
	I	II	III	....	n
I	a_{11}	a_{12}	a_{13}	....	a_{1n}
II	a_{21}	a_{22}	a_{23}	....	a_{2n}
III	a_{31}	a_{32}	a_{33}	....	a_{3n}

يمكن قراءة جدول أعلاه بالشكل التالي:

- كل عمود يحدد مستلزمات المدخلات لإنتاج وحدة للمنتج لصناعة خاصة. العمود الثاني على سبيل المثال يشير إلى أنه لو أردنا إنتاج وحدة بمقدار دينار من السلعة II فان المدخل الذي نحتاجه من (a_{12}) من السلعة I و a_{22} من السلعة II و a_{32} من السلعة III.... الخ.

- في حالة عدم استخدام المصنع لإنتاجه الخاص كمدخل معنى ذلك أن القطر الرئيسي (a_{11} , a_{22} a_{33}, ...a_{nn}) *للمصفوفة* A *يصبح صفر.*

جـ- بناء نموذج المدخلات -المخرجات

يعتمد بناء نموذج المدخلات-المخرجات على العلاقات الاقتصادية التي تمثل التوازن العام للطلب على سلعة ما وعرض تلك السلعة في السوق وفي فترة زمنية معينة. بمعنى أن العرض الكلي لمنتجات القطاع i من قبل القطاعات الاقتصادية المختلفة الأخرى j بما فيها القطاع i نفسه مضافا إليه الطلب النهائي والذي نرمز له بالرمز (DF) و هذا يعني أن العرض الكلي والطلب الكلي لأي قطاع من القطاعات الاقتصادية يساوي: الطلب الوسيط على المنتجات (DI) مضافا إليه الطلب النهائي DF أو [الاستهلاك].

مثال:

إذا افتراضنا أن هيكل الإنتاج في اقتصاد ما مكون من قطاعين هما القطاع الزراعي والقطاع الصناعي، مع الأخذ بعين الاعتبار ماذا سيحصل للناتج في القطاع الزراعي.

- نحتاج حساب الناتج الكلي لهذا القطاع بافتراض أن يكون مقداره 100 وحدة.
- نحتاج معرفة إلى أين يتجه هذا الناتج.

نفرض أن 76 وحدة تذهب بشكل مباشر إلى المستهلك في شكل لحوم وفواكه... الخ، و24 وحدة إضافية تذهب منها 14 وحدة إلى القطاع الصناعي و10 وحدات المتبقية استخدمت في القطاع االعيلـزر نفسه كغذاء للمواشي والبذور... الخ. ويمكن تبيان ماذا سيحصل للناتج في القطاع الصناعي و هذا باعتبار أن إجمالي الإنتاج 200 وحدة قد وزعت بين ثلاث أبعاد، 144 تذهب بشكل مباشر إلى المستهلك و56 وحدة إضافية تذهب منها 40 وحدة إلى القطاع الزراعي و16 وحدة المتبقية استخدمت في القطاع الصناعي نفسه.

من المعطيات المذكورة أعلاه يمكن وضع جدول يعطي صورة كاملة لأبعاد إجمالي الإنتاج في الاقتصاد.

إجمالي الإنتاج مج المخرجات	الطلب النهائي	الطلب الوسيط [المدخل]		القطاعات المنتجة [المخرج]
		الصناعة	الزراعة	
100	76	14	10	الزراعة
200	144	16	40	الصناعة

نلاحظ من الجدول الذي يشير إلى جدول المدخلات-المخرجات لاقتصاد بسيط مكون من قطاعين.

المخرجات لكل قطاع موضحة في شكل صفوف.

المدخلات لكل قطاع موضحة في شكل أعمدة.

د- التحليل الرياضي لنموذج المدخلات – المخرجات

يستخدم التحليل الرياضي لهذا النموذج في توضيح التداخل بين الأنشطة الاقتصادية المختلفة وهنا يمكن تقسيم الاقتصاد إلى عدد من القطاعات يقدم كل قطاع بتصريف إنتاجه أما عن طريق بيعه كمادة أولية للصناعات الأخرى أو لنفس القطاع أو عن طريق بيعه كسلعة نهائية للطلب النهائي المستهلك أو القطاع الخارجي أو الحكومة.

قطاعات الاقتصاد الوطني	قطاعات المستهلكة –الطلب الوسيط $1 \quad 2 \quad 3 \ldots\ldots n$	الاستهلاك النهائي	الإنتاج الإجمالي
القطاعات المنتجة	$X_{11} \quad X_{12} \quad X_{13} \ldots\ldots X_{1n}$ $X_{21} \quad X_{22} \quad X_{23} \ldots\ldots X_{2n}$ . . . . $X_{m1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots X_{mn}$	Y_1 Y_2 . . . . Y_n	X_1 X_2 . . . . X_n
القيمة المضافة	$V_1 \quad V_2 \ldots\ldots\ldots\ldots V_n$	$\sum_{j=1}^{n} V_J = \sum_{i=1}^{n} Y_I$	
الإنتاج الإجمالي	$X_1 \quad X_2 \ldots\ldots\ldots\ldots X_n$		$\sum_{i=1}^{n} X_i$

عند النظر إلى الجدول من زاوية العرض [حسب الأسطر] يمكن استخراج المعادلات التالية:

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} + \dots\dots\dots\dots\dots X_{1n} + Y_1 = X_1$$
$$X_{21} + X_{22} + X_{23} + \dots\dots\dots\dots\dots X_{2n} + Y_2 = X_2$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \qquad \vdots \quad \vdots$$
$$X_{n1} + X_{n2} + X_{n3} + \dots\dots\dots\dots\dots X_{nn} + y_n = X_n$$

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} X_{ij} + Y_i \qquad (6-24)$$

وبالنظر إلى الجدول من زاوية الطلب [حسب الأعمدة] يمكن أن نستخرج المعادلات التالية:

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} + \dots\dots\dots\dots + X_{n1} + V_1 = X_1$$
$$X_{12} + X_{22} + X_{32} + \dots\dots\dots\dots + X_{n2} + V_2 = X_2$$
$$X_{13} + X_{23} + X_{33} + \dots\dots\dots\dots + X_{n3} + V_3 = X_3$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \qquad \vdots \quad \vdots$$
$$X_{1n} + X_{2n} + X_{3n} + \dots\dots\dots + X_{nn} + V_n = X_n$$

$$X_{ij} = \sum_{i=1}^{n} X_{ij} + V_j \qquad (6-25)$$

بجمع أسطر الجدول نجد:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} X_{ij} + \sum_{i=1}^{n} Y_i \qquad (6-26)$$

بجمع أعمدة الجدول نجد:

$$\sum_{j=1}^{n} X_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} X_{ij} + \sum_{j=1}^{n} V_j \qquad (6-27)$$

ومنه نجد:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} X_{ij} + \sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} X_{ij} + \sum_{j=1}^{n} V_j$$

وبما أن:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} X_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} X_{ij}$$

فإن:

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{j=1}^{n} V_j \qquad (6-28)$$

وهذا يعني اقتصاديا أن الاستهلاك النهائي Y_i في المجتمع يتطابق مع القيمة الجديدة المولدة من عملية الإنتاج.

و- مصفوفة المعاملات الفنية المباشرة للإنتاج

يطلق على عناصر a_{ij} بالمعاملات الفنية المباشرة للإنتاج أي:

$$a_{ij} = \frac{X_{ij}}{X_j} \qquad (6-29)$$

وهي تعني مقدار المدخلات اللازمة من إنتاج القطاع (i) لإنتاج وحدة واحدة من القطاع j.

*** خصائص المعاملات الفنية**

-1- $a_{ij} \geq 0$ من أجل جميع قيم i، j

-2- ليس لها وحدة قياس

-3- $a_{ij} \prec 1$

-4- $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = [a_{11} + a_{12} + ... + a_{1n}] \leq 1$$

في حالة ما إذا كان الاستهلاك النهائي من منتجات هذا القطاع معدوما أي كل ما أنتج استهلك في صورة مستلزمات وسيطية فإن المجموع يساوي صفر، أما إذا كان المجموع يساوي أقل من الواحد

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = [a_{11} + a_{21} + a_{31} .... + a_{n1}] \langle 1$$

يدل على أن عملية الإنتاج لا يمكن أن تتم بدون قيمة مضافة.

وبما أن $$a_{ij} = \frac{X_{ij}}{X_j} \Rightarrow X_{ij} = a_{ij} \; X_j$$

يمكن كتابة جملة المعادلة من منظور العرض [حسب الأسطر]

$$\begin{aligned}
X_1 &= a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + ... + a_{1n}X_n + Y_1 \\
X_2 &= a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + ... + a_{2n}X_n + Y_2 \\
&\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
X_n &= a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + ... + a_{nn}X_n + Y_n
\end{aligned} \qquad (6-30)$$

يمكن صياغة العلاقة (6-30) بشكل مصفوفات

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \ldots\ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_n \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_n \end{bmatrix}$$ وفق ا

$X =$

$$X - AX = Y$$

$$X[I - A] = Y \Rightarrow X = \frac{Y}{I - A} = [I - A]^{-1}\, Y \qquad (6-31)$$

مثال:

بافتراض أن اقتصاد ما مكون من قطاعين والتداخلات القطاعية بينهما موضح في الجدول:

المخرج / المدخل	الطلب الوسيط		الطلب النهائي	الناتج الكلي
	A	B	Y	X
A	15,5	3,25	20	38,75
B	7,75	9,75	15	32,5
C عوامل أخرى	15,5	19,5	–	35
إجمالي الاستخدامات	38,75	32,50	35,00	106,25

المطلوب:

-1- إيجاد الناتج الكلي عندما يزداد الطلب النهائي في القطاعين ليصبح $X_A=30$ ،$X_B=25$

-2- كون الجدول على ضوء النتائج الجديدة.

الحل:

نستخرج مصفوفة المعاملات الفنية و التي هي عبارة عن نسب إنتاج القطاع إلى إجمالي الاستخدامات: $a_{ij} = \dfrac{X_{ij}}{X_j}$

$$A = \begin{bmatrix} 15{,}5/38{,}75 & 3{,}25/32{,}50 \\ 7{,}75/38{,}75 & 9{,}75/32{,}5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}3 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن القطاع (C) وهو عوامل إنتاج أخرى لم نضعه في مصفوفة المعاملات الفنية، والسبب هو انه قطاع مفتوح ليس له طلب نهائي.

ويعامل في هذه الحالة كقطاع يستخدم منتجات القطاعين (A, B) ويمثل معهما مجموع الاستخدامات الموجودة في أسفل الجدول. لكنه وإن يحدد الفن الإنتاجي فهو لا يحدد علاقة القطاعات بشكل حاسم مع الطلب النهائي ولهذا نستبعد قيمة القطاع C من مصفوفة المعاملات وعندما تكون مجموع المعاملات الفنية عند كل عمود لا يساوي ما قيمته الواحد بعد اشتماله على تكلفة المدخل الذي يذهب للقطاع المفتوح (C).

نستخرج مصفوفة ليونتيف:

$$1)\ \ [I - A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}6 & -0{,}1 \\ -0{,}2 & 0{,}7 \end{bmatrix}$$

$$2)\ \ |I - A| = 0{,}4$$

$$3)\ \ C(A) = \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}6 \end{bmatrix} \rightarrow \dot{C}(A) = \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}6 \end{bmatrix}$$

وعند تغير الطلب النهائي:

$$\begin{bmatrix} X_A \\ X_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,1 \\ 0,2 & 0,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30 \\ 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 58,75 \\ 52,50 \end{bmatrix}$$

إعادة صياغة الجدول الجديد بحساب مقدار المدخلات ومخرجات القطاعين (A, B) والقطاع المفتوح من خلال القيم الجديدة $(X_A\ ,\ X_B)$ باعتبار أن مصفوفة (A) التي تمثل المعاملات الفنية للقطاعات تمثل أيضا الفن الإنتاجي الذي يشترط فيه الثبات في نموذج ليونتيف.

$$a_{11} = (0,4)\times(58,75) = 23,5$$
$$a_{12} = (01)\times(52,50) = 5,25$$
$$a_{21} = (0,2)\times(58,75) = 11,75$$
$$a_{22} = (0,3)\times(52,50) = 15,75$$

- **الجدول الجديد**

Output / Input	الطلب الوسيط		الطلب النهائي	الناتج الكلي
	A	B		
A	23,50	5,25	30	58,75
B	11,75	15,75	25	52,50
C	23,50	31,50	–	55
إجمالي الاستخدامات	58,75	52,50	55	

م- مضاعف جدول المدخلات-المخرجات

عند حساب أثر تغير متجه (شعاع) الطلب النهائي بمقدار وحدة واحدة على الإنتاج لكل قطاع من القطاعات وعلى الإنتاج الكلي، يمكن توظيف جدول المدخلات-المخرجات لهذا الهدف.

مثال:

بافتراض أن مصفوفة المعاملات الفنية A والشعاع الطلب النهائي الحالي على منتجات القطاعات كالآتي:

$$A = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,4 \end{bmatrix} \qquad Y_D = \begin{bmatrix} 100 \\ 50 \end{bmatrix}$$

الحل

-1- حساب $[I - A]$

$$[I - A] = \begin{bmatrix} 0,8 & -0,1 \\ -0,3 & 0,6 \end{bmatrix}$$

-2- حساب المحدد

$$|I - A| = 0,45$$

-3- حساب مصفوفات المرافقات

$$C(A) = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,3 \\ 0,3 & 0,8 \end{bmatrix}$$

-4- تدوير المصفوفة $C(A)$

$$C'(A) = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,1 \\ 0,3 & 0,8 \end{bmatrix} = Adj[I - A]$$

-5- حساب $[I-A]^{-1}=\frac{1}{0,45}.adj[I-A]$

$$=\frac{1}{0,45}\begin{bmatrix}0,6 & 0,1\\ 0,3 & 0,8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1,33 & 0,22\\ 0,67 & 1,78\end{bmatrix}$$

وباستخدام أرقام الشعاع الطلب النهائي نحصل على مستويات الإنتاج لكل قطاع وذلك باستخدام الصيغة التالية: $X=[I-A]^{-1}Y$

$$X=\begin{bmatrix}1,33 & 0,22\\ 0,67 & 1,78\end{bmatrix}\begin{bmatrix}100\\ 50\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}144\\ 156\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}X_1\\ X_2\end{bmatrix}$$

نفترض الآن زيادة الطلب النهائي على إنتاج X_2 بمقدار وحدة نقدية واحدة أي زيادة الطلب النهائي للقطاع X_2 من 50 إلى 51 وحدة، وباستخدام العلاقة التالية: $X=[I-A]^{-1}Y$

$$X=\begin{bmatrix}1,33 & 0,22\\ 0,67 & 1,78\end{bmatrix}\begin{bmatrix}100\\ 51\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}144,22\\ 157,78\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{X}_1\\ \bar{X}_2\end{bmatrix}$$

نلاحظ إن زيادة الطلب النهائي على إنتاج القطاع X_2 أدت إلى زيادة في إجمالي إنتاج القطاع كلها كالآتي:

$$\Delta X_1=\bar{X}_1-X_1=144,22-144=0,22$$

$$\Delta X_2=\bar{X}_2-X_2=157,78-153=1,78$$

$$\sum \Delta X_i=0,22+1,78=2$$

ويمكن تفسير ذلك بأن زيادة الطلب النهائي (y) على إنتاج القطاع X_2 بمقدار وحدة واحدة ترتب عليها زيادة في إجمالي الإنتاج للقطاع X_1 بمقدار 0,22 أي أن:

$$M_{12} = \frac{\Delta X_1}{\Delta Y_2} = \frac{0,22}{1} = 0,22$$

وأيضا زيادة الطلب النهائي على منتجات القطاع X_2 أدى إلى زيادة إجمالي إنتاج القطاع X_2 بمقدار 1,78 أي:

$$M_{22} = \frac{\Delta X_2}{\Delta Y_2} = \frac{1,78}{1} = 1,78$$

وعند الرجوع إلى مصفوفة $[I\text{-}A]^{-1}$ نجد ان المضاعف M_{12} يمثل قيمة العنصر a_{12} في هذه المصفوفة $a_{12} = 0,22$ وأن المضاعف M_{22} يمثل العنصر $a_{22} = 1,78$.

نستنتج من ذلك أن زيادة الطلب النهائي على إنتاج القطاع X_2 أدت إلى زيادة في إجمالي ناتج القطاعين بمقدار 2 وحدة. وبالنظر إلى المصفوفة $[I\text{-}A]^{-1}$ نجد أن الزيادة في القطاعين تمثل مجموع عناصر العمود الثاني للمصفوفة. معنى ذلك أن مضاعف القطاع X_2 للاقتصاد ككل يساوي مجموع عناصر العمود الثاني في المصفوفة $[I\text{-}A]^{-1}$ وكذلك فان مضاعف القطاع X_1 يمثل مجموع عناصر العمود الأول في المصفوفة $[I\text{-}A]^{-1}$ أي أن:

$$M_j = a_{1j} + a_{2j} + \dots\dots\dots\dots$$

$$M_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$$

في المصفوفة $[I\text{-}A]^{-1}$

ومن ذلك نرى عند زيادة إنتاج القطاع X_1 مثل بمقدار ΔX_1 فان ذلك يترتب عليه زيادة في إجمالي إنتاج القطاعين بمقدار:

$$\Delta X = \Delta X_1 + \Delta X_2$$

$$\Delta X = \sum_{i=1}^{n} \Delta X_{ij}$$

أي أن:

$$\Delta X = \Delta X_1 M_1 = \Delta X_1 \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \qquad (6-32)$$

حيث أن a_{ij} يمثل العنصر الواقع في السطر و العمود في المصفوفة $[I-A]^{-1}$ في حساب المضاعفات سواء بالنسبة لأي قطاع معين أو بالنسبة لقطاعات الاقتصاد كلها.

هـ- الأسعار في نموذج المدخلات -المخرجات

بأخذ مثال لـ ص 245 نلاحظ أن القيم الكلية للقطاع الزراعي 100 دج وأن قيم المدخلات الوسيطة للعمود الأول هي:

$$10 + 40 = 50$$

وللتأكد من أن قيم الناتج للقطاع متوازنة مع قيم المدخل لنفس القطاع.نلاحظ فقدان القطاع الأول [القطاع الزراعي] للقيمة 50 دينار أي:

$$100 - 50 = 50$$

وبنفس الأسلوب يمكن معرفة فقدان مدخلات القطاع الثاني [القطاع الصناعي]

$$14+16=50$$

$$200 - 30 = 170$$

وكما نعلم تحسب هذه المفقودات كرسوم للعمل ورأس المال والمواد الأولية وتسمى هذه المدخلات غير المنتجة.

ومن الطبيعي فان هذه المدخلات في عملية الإنتاج واستخداماتها للقيمة المضافة إلى السلع المنتجة ومن ثم يشار إلى قيمة تلك المدخلات كقيمة مضافة $[VA]$ وبهذا المفهوم نستطيع كتابة جدول المنتج بشكل كامل كما يلي:

	القطاع الزراعي	القطاع الصناعي	الطلب النهائي	إجمالي الإنتاج
القطاع الزراعي	10	14	76	100
القطاع الصناعي	40	16	144	200
القيمة المضافة VAB	50	170	220	
إجمالي الإنتاج Total output	100	200		300

نلاحظ من الجدول أعلاه أن:

القيمة المضافة الإجمالية = الطلب النهائي الإجمالي = 220 ويعتبر هذا مجرد حساب عادي نكتب الآن الجدول بشكل عام جبري كما يلي:

القطاعات المنتجة	القطاع الزراعي	القطاع الصناعي	الطلب النهائي	إجمالي الإنتاج
القطاع الزراعي	X_{11}	X_{12}	Y_1	X_1
القطاع الصناعي	X_{21}	X_{22}	Y_2	X_2
القيمة المضافة AV	V_1	V_2	$\sum_{j=1}^{N} V_j = \sum_{i=1}^{n} Y i$	
إجمالي الإنتاج Total output	X_1	X_2		$\sum_{I=1}^{N} Xi$

نحدد الآن الأسعار

- سعر كل وحدة من السلعة (1) هو P_1
- سعر كل وحدة من السلعة (2) هو P_2

نفترض وجود مستخدم غير منتج [العمل] (L) مع سعر الوحدة أو [الأجر الحقيقي للعمل] (w) يمكن إعادة كتابة جدول *(I-O)* للأسعار والكميات المادية:

القطاعات المنتجة	القطاع الزراعي	القطاع الصناعي	الطلب النهائي	إجمالي الإنتاج
القطاع الزراعي (1)	P_1X_{11}	P_1X_{12}	P_1Y_1	P_1X_1
القطاع الصناعي (2)	P_2X_{21}	P_2X_{22}	P_2Y_2	P_2X_2
القيمة المضافة	wL_2	wL_1		
إجمالي الإنتاج	P_1X_1	P_2X_2		$P_1X_1+P_2X_2$

من الجدول أعلاه يمكن استخراج نوعين من معادلات نموذج $(I\text{-}O)$

- معادلات المخرج Equations des outputs

$$P_1X_{11} + P_1X_{12} + P_1Y_1 = P_1X_1$$
$$P_2X_{21} + P_2X_{22} + P_2Y_2 = P_2X_2 \qquad (6-33)$$

- معادلات المدخل Equations des inputs

$$P_1X_{11} + P_2X_{21} + wL_1 = P_1X_1$$
$$P_2X_{12} + P_2X_{22} + wL_2 = P_2X_2 \qquad (6-34)$$

عند افتراض تكنولوجيا أن الإنتاج أي مستلزمات المدخلات المادية كنسبة من إجمالي الناتج المادي:

$$X_{11} = a_{11}X_1 \qquad X_{12} = a_{12}X_2$$
$$X_{21} = a_{21}X_1 \qquad X_{22} = a_{22}X_2$$
$$L_1 = r_1X_1 \qquad L_2 = r_2X_2$$

أي أن:

$$X_{ij} = a_{ij} \times X_j \Rightarrow a_{ij} = \frac{X_{ij}}{X_j}$$

$$r_1 = \frac{L_1}{X_1} \Rightarrow L_1 = r_1 X_1$$

$$r_2 = \frac{L_2}{X_2} \Rightarrow L_2 = r_2X_2$$

حيث r تمثل معدل نسبة الإضافة

وعند التعويض عن X_{11} بـــ $a_{11}X_1$ و L بـــ r في المعادلة (6-34) نحصل على:

$$P_1 a_{11} X_1 + P_2 a_{21} X_1 + w r_1 X_1 = P_1 X_1 \qquad (6-35)$$

$$P_1 a_{12} X_2 + P_2 a_{22} X_2 + w r_2 X_2 = P_2 X_2 . \qquad (6-36)$$

وبقسمة المعادلة (6-35) على X_1 والمعادلة (6-36) على X_2 نحصل على:

$$P_1 a_{11} + P_2 a_{21} + w r_1 = P_1 \qquad (6-37)$$

$$P_1 a_{12} + P_2 a_{22} + w r_2 = P_2 \qquad (6-38)$$

نستنتج من المعادلتين (6-37) و (6-38) والتي تمثلان بشكل مباشر باستخدام قاعدة التسعير في هذا النموذج "أن سعر البضاعة أو السلعة يساوي كلفة المنتج وغير المنتج الضروري لتصنيعه".

يمكن وضع المعادلتين (6-37) و(6-38) بشكل مصفوفات:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} \qquad (6-39)$$

وعند أخذ منقول المصفوفة لكلا الطرفين نحصل على:

$$P^T = A^T P^T + wr^T \qquad (6-40)$$

$$\begin{bmatrix} P_1 & P_2 \end{bmatrix}_{1\times2} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2\times2} + w\begin{bmatrix} r_1 & r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \end{bmatrix}$$

أي أن:

$$PA + wr = P$$

وأن منقولها هو:

$$P^T A + wr^T = P^T$$

$$w r^T = P^T - P^T A$$

$$wr^T = P^T [I - A]$$

$$P^T = \frac{wr^T}{[I - A]}$$

$$P = P^T = wr^T [I - A]^{-1} \qquad (6-41)$$

وهي المعادلة الأساسية والتي يمكن حلها وإيجاد أسعار البيع P_1 و P_2 بمجرد معرفة كلا ما يلي:

- الأجر الحقيقي للعمل [السعر العمل w]
- المصفوفة الفنية [A]
- قيمة مشتريات العمل/الإنتاج [معدل الإضافة r]

وبهذا يصبح بالإمكان حساب أسعار السلع في الاقتصاد مع ملاحظة أن أسعار السلع تعتمد فقط على المدخل غير المنتج. وتعتبر تلك الأسعار نسبة إلى أجور العمل، وبذلك تعتمد الأسعار في النموذج على تقنية الإنتاج (A,r) و كلاهما مستقلان بشكل كامل عن مستوى الطلب وهذا لا يشبه النماذج الطبيعية للنظرية الجزئية إلى حد ما. إذن يمكن حساب السعر والكميات من الصيغة التالية:

$$P = wr^T[I-A]^{-1}$$

$$X = [I-A]^{-1}D$$

مثال:

إذا أعطيت لك المعلومات الآتية:

$$A = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,4 \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} 100 \\ 50 \end{bmatrix} \qquad r = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad w = 3$$

المطلوب

1- حساب السعر والكمية للسلعتين ولتكن X_1 و X_2

2- الطلب الوسيط

3- احتياجات المستخدم من العمل

4- القيمة المضافة

الحل

- حساب الكمية للسلعتين X_1 و X_2 وهذا باستخدام العلاقة التالية:

$$X = [I-A]^{-1}Y$$

*- نحسب $[I-A]$

$$[I-A]=\begin{bmatrix} 0,8 & -0,1 \\ -0,3 & 0,6 \end{bmatrix}$$

*- نحسب $|I-A| = 0,45$

*- حساب مصفوفة المرافقات وتدويرها

$$C(A)=\begin{bmatrix} 0,6 & 0,3 \\ 0,1 & 0,8 \end{bmatrix} \rightarrow \qquad C'(A) = Adj\ A = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,1 \\ 0,3 & 0,8 \end{bmatrix}$$

*- نحسب معكوس المصفوفة $[I-A]^{-1}$ كما يلي:

$$[I-A]^{-1} = \frac{1}{|I-A|} adj[I-A]$$
$$= \frac{1}{0,45}\begin{bmatrix} 0,6 & 0,1 \\ 0,3 & 0,8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,33 & 0,22 \\ 0,67 & 1,78 \end{bmatrix}$$

*- بتطبيق الصيغة أعلاه نحصل على:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,33 & 0,22 \\ 0,67 & 1,78 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 100 \\ 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 144 \\ 156 \end{bmatrix}$$

*- حساب السعر (P) باستخدام الصيغة الآتية:

$$P = wr^{T}[I - A]^{-1}$$

$$P = 3\begin{bmatrix}2 & 3\end{bmatrix}_{1\times 2}\begin{bmatrix}1,33 & 0,22\\ 0,67 & 1,78\end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$= \begin{bmatrix}6 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1,33 & 0,22\\ 0,67 & 1,78\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}14,01 & 17,34\end{bmatrix}$$

1- حساب الطلب الوسيط وهذا باستخدام الصيغة التالية:

$$AX + Y = X$$

$$\begin{bmatrix}0,2 & 0,1\\ 0,3 & 0,4\end{bmatrix}_{2\times 2}\begin{bmatrix}144\\ 156\end{bmatrix}_{2\times 1} + \begin{bmatrix}100\\ 50\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}144,4\\ 155,6\end{bmatrix}$$

يمكن بناء جدول الإنتاج المادي الآتي:

القطاعات المنتجة	الزراعة 1	الصناعة 2	الطلب النهائي	Total Output
الزراعة 1	28,8	15,6	100	144,4
الصناعة 2	43,2	62,4	50	155,6

للوصول إلى قيم الناتج نقوم بوضع جدول قيم الناتج بإتباع ما يلي:

- القطاع الزراعي (1):

$$X_{11} = P_1 a_{11} = 406,1$$

$$X_{12} = P_1 a_{12} = 219,9$$

القطاع الصناعي (2)

$$X_{21} = P_2 a_{21} = 749,088$$

$$X_{22} = P_2 a_{22} = 1082,016$$

الطلب النهائي على منتجات القطاع الزراعي $P_1 \times Y_1 = 1410$

الطلب النهائي على منتجات القطاع الصناعي $P_2 \times Y_2 = 867$

وبجمع مستخدمات القطاعين الزراعي والصناعي نحصل على قيم الناتج الكلي لكلا القطاعين كما يلي:

- القطاع الزراعي= 2036 =406,1 + 1410+219,9

- القطاع الصناعي= 2698,104 = 1082,016 + 867+7499,088

جدول قيم الناتج

القطاعات المنتجة	القطاع الزراعي	القطاع الصناعي	الطلب النهائي	إجمالي الإنتاج
القطاع الزراعي (1)	406,1	219,9	1410	2036
القطاع الصناعي (2)	749,088	1082,016	867	2698,104

- حساب احتياجات مستخدم العمل باستخدام الصيغة التالية:

$$L_1 = X_1 r_1 = 288$$

$$L_2 = X_2 r_2 = 468$$

- حساب القيمة المضافة لكلا القطاعين كما يلي:

- القيمة المضافة للقطاع الزراعي: $VA_1 = wL_1 = 864$

- القيمة المضافة للقطاع الصناعي: $VA_2 = wL_2 = 1404$

تمارين الفصل السادس

التمرين 1-6

لدينا النموذج التوازني للدخل الوطني لإحدى الدول:

$$Y = C + I + G \qquad (1)$$

$$C = 60 + 0,7(Y - T) \qquad (2)$$

$$T = 0,3Y \qquad (3)$$

$$I = I_0 = 30 \qquad (4)$$

$$G = G_0 = 20 \qquad (5)$$

1- أوجد القيم التوازنية للدخل Y وللاستهلاك C والضريبة $\bar{T}$ باستخدام جبر المصفوفات

2- نفرض أن معدل الضريبة أصبح $t = 0,20$، أحسب القيم التوازنية الجديدة وقارنها مع القيم التوازنية عندما كان معدل الضريبة $t = 30\%$.

3- أحسب القيم التوازنية عند فرض أن معدل الضريبة قد أصبح $t = 40\%$، وقارن مع (1) و(2).

4- بفرض أن الدخل الوطني المتوقع هو 240 مليار وحدة نقدية فما هو معدل الضريبة t الذي يحقق توازن للدخل الوطني المتوقع.

التمرين 2-6

بافتراض أن اقتصاد مفتوح مكون من أربعة قطاعات وأن دالة الاستهلاك هي:

$$C = 20 + 0{,}75\,Y \qquad (1)$$
$$I_0 = 30 \qquad (2)$$
$$G_0 = 50 \qquad (3)$$
$$X_0 = 35 \qquad (4)$$
$$M = 5 + 0{,}24\,Y \qquad (5)$$

المطلوب تحديد القيم التوازنية (الدخل) الاستهلاك والواردات.

التمرين 3-6

إذا أعطيت لك مصفوفة المعاملات الفنية لثلاث قطاعات والشعاع الطلب النهائي:

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}4 \end{bmatrix} \qquad D = Y = \begin{bmatrix} 700 \\ 2100 \\ 1400 \end{bmatrix}$$

فإذا ارتفع الطلب النهائي على إنتاج القطاع X_1 بوحدة واحدة حدد مضاعف هذا القطاع بالنسبة للاقتصاد ككل.

التمرين-4-6

في الجدول التالي معلومات تتعلق باقتصاد إحدى الدول:

	1	**2**	**3**	**طلب نهائي D**	**انتاج اجمالي Y**
1	40	50	60	110	260
2	120	30	30	120	300
3	60	90	40	180	370
أجور	30	90	160		
أرباح	10	40	80		
Y	260	300	370		930

1- أحسب مصفوفة المعاملات الفنية A، وادرس العلاقة بين القطاعات الثلاثة.

2- أوجد المعاملات الفنية الخاصة بالأجور والأرباح وفسر مدلولها.

3- أوجد حجم الإنتاج الضروري لتلبية الطلب النهائي الجديد الممثل بشعاع الطلب Y

$$Y = \begin{bmatrix} 130 \\ 140 \\ 200 \end{bmatrix}$$

1- أوجد حجم مخرجات القطاع الأول التي تذهب للاستخدام الوسيط.

التمرين 5-6

لدينا مصفوفة المعاملات الفنية A لاقتصاد إحدى الدول المقسم إلى ثلاثة قطاعات:

$$A = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,2 & 0,1 \\ 0 & 0,3 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0,4 \end{bmatrix}$$

1- هل المصفوفة A ترابطية أم غير ترابطية، ولماذا؟.

2 - أحسب حجم الإنتاج في القطاعات الثلاثة الضروري لتلبية الطلب النهائي إذا علمت أن قيمة محددة المصفوفة $(I\text{-}A)$ هو (0.21).

$$D = \begin{bmatrix} 150 \\ 250 \\ 200 \end{bmatrix}$$

3- أحسب معاملات النفقات الأولية وفسر مدلولها الاقتصادي.

4- بين في ما إذا التغير في D_1 (الطلب على منتجات القطاع الأول) يؤثر في كل مركبات شعاع الانتاج Y.

التمرين 6-6

لدينا جد ول المستخدم – المنتج التالي:

	الصناعة	الزراعة	باقي القطاعات	الطلب النهائي
الصناعة	63	24	12	111
الزراعة	42	36	18	24
باقي القطاعات	21	12	18	9

- أوجد الشعاع الإنتاج Y للقطاعات الثلاثة
- أوجد مصفوفة المعاملات الفنية A
- أوجد حجم المدخلات الأولية
- أوجد المعاملات الفنية لمجمل المدخلات الأولية

التمرين 6-7

إذا أعطيت لك المعلومات عن اقتصاد افتراضي مكون من قطاعين وكانت مصفوفة المعاملات الفنية A كما يلي:

$$A = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,4 \\ 0,5 & 0,2 \end{bmatrix}$$

وقيمة الاستهلاك النهائي للقطاع الأول 100 وللقطاع الثاني 200، ومستلزمات العمل / الإنتاج هي: $r = [2 \quad 3]$ ومعدل الأجر النقدي $w = 2$.

مطلوب:

1- أحسب الناتج الكلي للقطاعين X_1 , X_2

2- أحسب أسعار السلعتين P_1 , P_2

3- أحسب الطلب الوسيط للقطاعين

4- كون جدول الإنتاج المادي

5- أحسب مستلزمات العمل

6- أحسب القيمة المضافة لهذا الاقتصاد

7- قـيّم السلعتين.

التمرين 8-6

إذا أعطيت لك المعلومات التالية عن اقتصاد مغلق مكون من قطاعين:

- مصفوفة المعاملات الفنية $A = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,3 & 0,2 \end{bmatrix}$
- قيمة مشتريات العمل / الإنتاج $r = [1/2 \quad 1]$
- معدل النسبي الإضافة للقطاع الأول 0.20 وللقطاع الثاني 0.30.
- معدل الأجر النقدي لساعة عمل واحدة هو 2.

المطلوب: أوجد سعر البيع لكل من السلعتين المنتجين في هذا الاقتصاد

التمرين 9-6

لنصطلح على أن نرمز بـــ X لحجم الإنتاج في بلد معين، Y لعجز ميزان المدفوعات، P لمستوى الأسعار وبـــ Z لمستوى الأجور، ولنفرض أن المتحولات z, p, y, x تمثل على الترتيب الفروق لحجم الإنتاج، لعجز ميزان المدفوعات، لمستوى الأسعار ولمستوى الأجورعن وضعية ابتدائية لها هي:

$$X_0 = 1 \quad Y_0 = 0{,}04 \qquad P_0 = 1 \qquad Z_0 = 1$$

وأنها مرتبطة مع بعض بموجب العلاقات:

$$\begin{aligned} 0{,}135x + y + 0{,}217p &= 0{,}165z \\ -0{,}44x + y - 0{,}53p &= 0 \\ -0{,}125x + p &= 0{,}03 \end{aligned} \qquad (1)$$

المطلوب:

1- بيان تأثير زيادة مستوى الأجور بمقدار 10% على كل من المتحولات الأخرى.

2- بين كم يجب أن ينخفض مستوى الأجور لكي ينعدم عجز ميزان المدفوعات ثم حدد عندما تتحقق الحالة الأخيرة تأثير ذلك على كل المتحولين الآخرين.



تمارين محلولة



تمارين الفصل الأول

التمرين 1-1

$$y + \Delta y = log\,(x + \Delta x)$$
$$\Delta y = log\,(x + \Delta x) - y$$
$$\Delta y = log\,(x + \Delta x) - log\,x$$

نطبق خاصية اللوغاريتم

$$\Delta y = \log\left[\frac{x + \Delta x}{x}\right] = \log\left[1 + \frac{\Delta x}{x}\right]$$

إذن:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log\left[1 + \frac{\Delta x}{x}\right]}{\Delta x}$$

عند التعويض مباشرة $\frac{0}{0}$ حالة عدم التعيين

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log\left[1 + \frac{\Delta x}{x}\right]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\log\left[1 + \frac{\Delta x}{x}\right]}{x}}{\frac{\Delta x}{x}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x}{\Delta x} \times \frac{1}{x} \log\left[1 + \frac{\Delta x}{x}\right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \log\left[1 + \frac{\Delta x}{x}\right]^{\frac{x}{\Delta x}}$$

نضع $t = \frac{\Delta x}{x}$ لما $0 \leftarrow t \Leftarrow 0 \leftarrow \Delta x$

وعليه فإن: $\frac{1}{t} = \frac{x}{\Delta x}$

إذن $\lim_{t \to 0} \frac{1}{x} \log[1+t]^{\frac{1}{t}} = \frac{1}{x}$

لأن: $\lim_{t \to 0} \log(1+t)^{\frac{1}{t}} = \log \ e = 1$

التمرين 2-1

$$1)\ y' = e^{-\frac{x}{2}} + \left[-\frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} x\right]$$

$$= e^{-\frac{x}{2}}\left[1 - \frac{x}{2}\right]$$

$$2)\ y' = o \Rightarrow e^{-\frac{x}{2}}\left[1 - \frac{x}{2}\right] = o$$

$$e^{-\frac{x}{2}} \neq o$$

إذن:

$$1-\frac{x}{2}=o$$

$$x=2$$

$$3)\ y''=-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\left[1-\frac{x}{2}\right]+\left[-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\right]$$

$$=e^{-\frac{x}{2}}\left[-1+\frac{x}{4}\right]$$

$$y''_{(2)}=-\frac{1}{2e}\langle\ 0$$

قيمة عظمى عندما $x = 2$

التمرين3-1

$$1)\text{-}\ y'=e^{1/x}\left[\frac{x^{2}-2}{x\sqrt{x^{2}+2x}}\right]$$

$$2)\ y'=-\frac{\sqrt{x-\sqrt{x^{2}-1}}}{2\sqrt{x^{2}-1}}$$

$$3)\ y'=e^{-3x}[-3\log(4x-1)+\frac{4}{4x-1}]$$

$$4)\ y'=\frac{2}{2x+1}-\frac{1}{2x}$$

$$5)\ y'=x^{\log x}.\frac{2}{x}\log x$$

$$6)\ y'=x^{x}[\log x+1]$$

7) $y' = \dfrac{nx^{n-1}}{(1+x)^{n+1}}$

8) $y' = \dfrac{-3x^{2} - 2x + 4}{2\sqrt{x-1}(x-2)^{4}}$

9) $y' = \dfrac{6x^{2}}{x^{9} - 1}$

10) $y' = \dfrac{2}{x\sqrt{1+x^{2}}}$

11) $y' = \dfrac{4}{\left(e^{x} + e^{-x}\right)^{2}}$

12) $y' = a^{x}\ x^{a}\left[\log a + \dfrac{a}{x}\right]$

13) $y' = x^{e^{x}}\ e^{x}\left[\log x + \dfrac{1}{x}\right]$

14) $y' = e^{2x-x^{2}}\left[2 - 2x\right]$

15) $y' = e^{x \log x}[\log x + 1]$

16) $y' = \dfrac{xe^{-x^{2}}}{\sqrt{1-e^{-x^{2}}}}$

17) $y' = \dfrac{-3(2x+1)}{k\left(x^{2} + x + 1\right)^{+\frac{3}{k}+1}}$

18) $y' = \left(\dfrac{x-2}{x^{3}}\right)e^{\frac{x-1}{x^{2}}}$

التمرين 4-1

الحل بالطريقة الأولى

الإيراد الحدي

$$R\,mg = 45 - x$$

التكلفة الحدية

$$Cmg = 3x^2 - 79\,x + 120$$

يتحقق التوازن عندما $Rmg = cmg$

إذن:

$$45 - x = 3\,x^2 - 79\,x + 120$$

$$-3\,x^2 + 78\,x - 75 = 0 \qquad (1)$$

نقسم (1) على (3-)

$$x^2 - 26\,x + 25 = 0$$

$$(x - 25)\,(x - 1) = 0$$

$$x_1 = 25 \quad , \quad x_2 = 1$$

من المعادلة (1) نشتق:

$$-6\,x + 78 \qquad (2)$$

إذا كان $x = 25$ فإن المعادلة (2)

$$-6\,(25) + 78 = -72 < 0$$

$x = 25$ حجم الإنتاج الذي يحقق توازن للمؤسسة ويحقق أعظم ربح.

إذا كان $x = 1$ فإن المعادلة (2)

$$-6(1) + 78 = +72 > 0$$

$x = 1$ حجم الإنتاج الذي يحقق قيمة صغرى وبالتالي فهذه القيمة مرفوضة اقتصاديا.

الحل بالطريقة الثانية

دالة الربح: $\pi = Rt - Ct$

$$\pi = 45x - 0.5x^2 - x^3 + 39.5x^2 - 120x - 125$$

$$\pi = -x^3 + 39x^2 - 75x - 125$$

نشتق المعادلة (1)

$$\frac{d\pi}{dx} = -3x^2 + 78x - 75 \qquad (2)$$

$$\frac{d\pi}{dx} = 0 \Rightarrow -3x^2 + 78x - 75 = 0$$

$$x = 25 \quad , \quad x = 1$$

نشتق العلاقة(2) فنجد:

$$\frac{d^2\pi}{dx^2} = -6x + 78 \qquad (3)$$

إذا كان $x = 1$ فإن العلاقة (3) تحقق قيمة صغرى

$$-6\,(1) + 78 = +\,72 > 0$$

إذا كان $x = 25$ فإن العلاقة (3) تحقق قيمة عظمى

$$-6\,(25) + 78 = -\,72 < 0$$

وبالتالي حجم الإنتاج الذي يحقق توازن المؤسسة هو: $x = 25$ وأعظم ربح

التمرين 5-1

-1

* تحديد التكلفة الحدية Cmg

$$cmg = \frac{dCt}{dy} = 6y^2 - 30y + 36$$

$$cmg(4) = 12$$

أي التكلفة تزداد بمقدار 12 وحدة عندما يزداد الإنتاج بمقدار وحدة واحدة.

- الإيراد الحدي Rmg

$$Rmg = \frac{dRt}{dy} = 12$$

-2 دالة الربح

$$\pi = RT - CT$$

$$\pi = -2y^3 + 15y^2 - 24y - 16$$

الشرط الأول $\frac{d\pi}{dy} = 0$

$$\frac{d\pi}{dy} = -6y^2 + 30y - 24 = 0$$

بإصلاح المعادلة الأخيرة نحصل على:

$$\bar{y}_1 = 1 \qquad \bar{y}_2 = 4$$

الشرط الثاني: $\frac{d^2\pi}{dy^2} \prec 0$

إذا كان $\bar{y}_1 = 1$ فإن $\frac{d^2\pi}{dy^2} \succ 0$

إذاكان $\bar{y}_2 = 4$ فإن $\frac{d^2\pi}{dy^2} \prec 0$

إذن مستوى الإنتاج الذي يحقق الشرط الثـــاني هــو $\bar{y}_2 = 4$ و بالتـــالي يحقق القيمة العظمى للربح وقيمته $\pi = 0$

3-حسب النتيجة المتحصل عليها في السؤال الثاني فإن المؤسسة لا تحقق عند مستوى $\bar{y}_2 = 4$ أي ربح أو خسارة وبالتالي يكون من الأفضل لهـــا أن تنتج بدلا من التوقف لأن في حالة التوقف ستحقق خسارة مقدارها 16 التي تعادل حجم التكاليف الثابتة.

التمرين 6-1

-1

نقوم بإصلاح المعادلة (1) $x = 45 - 0,5y$

$$Rt = y \times x$$

ومنه نحصل على:

$$= 45y - 0,5y^2$$

$$\frac{dRt}{dy} = 45 - y = 0$$

النهاية العظمى للإيراد الكلي:

$$\bar{y} = 45$$

وهو حجم الإنتاج الذي يحقق أعظم إيراد للمؤسسة $Rt = 1012,5$

-2 حجم الإنتاج الذي يحقق أعظم ربح

$$\pi = -y^3 + 39y^2 - 75y + 125$$

$$\frac{d\pi}{dy} = -3y^2 + 78y - 75$$

$$\bar{y}_1 = 1 \qquad \bar{y}_2 = 25$$

إذا كان $\bar{y}_1 = 1$ فإن $\frac{d^2\pi}{dy^2} \succ 0$

إذا كان $\bar{y}_2 = 25$ فإن $\frac{d^2\pi}{dy^2} \prec 0$

إذن عند مستوى $\bar{y}_2 = 25$ تحقق المؤسسة أعظم ربح $\pi = 7000$

3- تحديد حجم الإنتاج الذي يقلل التكاليف الحدية

$$Ct = y^3 + 39,5y^2 + 120y + 125$$

$$Cmg = \frac{dCt}{dy} = 3y^2 - 79y + 120$$

$$Cmg' = \frac{d^2Ct}{dy^2} = 6y - 79 = 0$$

$$\bar{y} = 13,16$$

عند مستوى الإنتاج $\bar{y} = 13,16$ تتحقق النهاية الصغرى للتكاليف الحدية

حل تمارين الفصل الثاني

التمرين 1-2

1-الشرط اللازم: البحث عن القيم المستقرة و هذا بجعل

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -2x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3 - 2y = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -2z = 0 \Rightarrow z = 0$$

الشرط اللازم محقق والقيم المستقرة $(0، \frac{3}{2}، 1)$

2- الشرط الكافي: تحديد نوعية هذه القيم المستقرة

أ- المشتقات الجزئية الثانية

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -2 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -2$$

ب - المشتقات المتقاطعة

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z\, \partial x} = 0$$

جـــ - وضع المحدد الهيسي

$$|H| = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

لحساب $|H|$ نتبع طريقة إضافة العمود الأول و الثـــاني ليـــصبح الرابـــع والخامس إذن:

$$|H| = \left|\begin{matrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{matrix}\;\begin{matrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right| = -8 < 0$$

نلاحظ أن إشارة المحددات الرئيسية تتناوب بدءا بالسالب

$$|H_1| = -2 < 0$$

$$|H_2| = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = +4 > 0$$

$$|H_3| = -8 < 0$$

فهذه النقاط تحقق قيمة عظمى قيمتها $\left(u = \frac{13}{4}\right)$.

التمرين 2-2

1. نضع دالة لاقرانج

$$L\,(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda\,[\,2 - x - 4\,y\,]$$

أ. الشرط اللازم: تحديد القيم الحرجة

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -2x - \lambda = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2y - 4\lambda = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 2 - x - 4y = 0 \qquad (3)$$

حل جملة هذه المعادلات الثلاثة نجد

$$\lambda = \frac{4}{17} \quad ، y = \frac{8}{17} \quad ، x = \frac{2}{17}$$

ب. الشرط الكافي: تحديد نوعية القيم الحرجة بواسطة المحدد $|\bar{H}|$

$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 & 2 \\ -1 & -4 & 0 & -1 & -4 \end{vmatrix} = -34 \prec 0$$

إذن لما $x = \frac{2}{17}$ و $y = \frac{8}{17}$ فإنها تحقق قيمة صغرى قيمتها $z = \frac{4}{17}$

التمرين- 3 -2

التفاضل الكلي يأخذ الشكل التالي:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy + \frac{\partial z}{\partial u} du$$

$$= (2ax + by)\, dx + bx\, dy + c\, du$$

المشتقة الكلية الجزئية بالنسبة لـ u تأخذ الشكل التالي:

$$\left.\frac{dz}{du}\right|_{dv=0} = (2ax+by)\frac{dx}{du} + bx\frac{dy}{du} + c\frac{du}{du}$$

$$= (2ax+by)\frac{dx}{du} + bx\frac{dy}{du} + c$$

$$= (2ax+by)\alpha + bx\gamma + c$$

$$= 2a\alpha x + by\alpha + bx\gamma + c$$

$$= (2a\alpha + b\gamma)x + by\alpha + c$$

المشتقة الكلية الجزئية لـ z بالنسبة لـ v تأخذ الشكل التالي

$$\left.\frac{dz}{dv}\right|_{du=0} = (2ax+by)\frac{dx}{dv} + bx\frac{dy}{dv} + c\frac{du}{dv}$$

$$= (2ax+by)\beta + 0 + 0$$

$$= 2ax\beta + by\beta$$

التمرين 4-2

نضع عبارة التفاضل الكلي الأولي لـU

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial Z}dZ$$

$$dU = -2Ky\sqrt{Z}\ell^{-2x}dx + K\sqrt{Z}\ell^{-2x}dy + \frac{Ky\ell^{-2x}}{2\sqrt{Z}}dZ$$

من أجل $Z=4\ ,\ y=2\ ,\ x=1\ ,\ dZ=0\ ,\ dy=-0.1\ ,\ dx=-0.05$

عند تعويض عن كل القيم نحصل على: $dU = 0,0272K$

هذا يعني أن تغير الذي حدث في الأسعار أدى إلى زيادة في الطلب بمقدار $0,0272K$. وبتعبير آخر نقول أن هذا التغير في الأسعار أدى إلى زيادة في الطلب بمقدار $0,05 = \frac{0,2\ell^{-2}k}{4\ell^{-2}k}$ من الكمية المطلوبة في حالة التوازن.

التمرين 5-2

$$dQ = \frac{\delta Q}{\delta x}dx + \frac{\delta Q}{\delta y}dy$$

$$= (ay - 2bx)dx + (ax - 2cy)dy$$

نضع عبارة معدل التغير في إنتاج السلعة A بالنسبة للزمن t أي نقسم طرفي العلاقة الأخيرة – عبارة التفاضل الكلي الأولي – على dt

$$\frac{dQ}{dt} = (ay - 2bx)\frac{dx}{dt} + (ax - 2cy)\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = \alpha^t \log \alpha \qquad \qquad \frac{dy}{dt} = \beta$$

$$\frac{dQ}{dt} = (ay - 2bx)\alpha^t \log \alpha + (ax - 2Cy)\beta$$

أو

$$\frac{dQ}{dt} = (a\beta t - 2b\alpha^t)\alpha^t \log \alpha + (a\alpha^t - 2C\beta t)\beta$$

و إذا كانت

$t = 2 \qquad \beta = 0,2 \qquad \alpha = 1,1 \qquad C = 2 \qquad b = 1 \qquad a = 20$

عند تعويض عن هذه القيم في العلاقة الأخيرة نحصل على $dQ/dt = 5,163$ هذا يعني أن إنتاج A يتزايد في وحدة من الزمن إعتبارا من نهاية الوحدة الزمنية الثانية $t=2$ وفق الشروط المذكورة أعلاه بمقدار يقدر بخمسة وحدات تقريبا.

التمرين 6-2

1- الإنتاجية الحدية لرأس المال x_2 :

$$\frac{\delta Q}{\delta x_2} = 3(0,4)\,x_1^{0,6}\,x_2^{-0,6} = 1,2\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{0,6}$$

$$= (1,2)\left(\frac{4}{10}\right)^{0,6} \approx 0,69$$

وهذا يعني أن الإنتاج Q يزداد بمقدار 0,69 وحدة عندما يزداد رأس المال بمقدار وحدة واحدة.

الإنتاجية الحدية للعمل x_1

$$\frac{\delta Q}{\delta x_1} = 3(0,6)\,x_1^{-0,4}\,x_2^{0,4} = 1,8\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{0,4} = 2,59$$

أي عندما يزداد العمل بمقدار وحدة واحدة فإن حجم الإنتاج يزداد بمقدار 2,59 وحدة.

-2

$$\sigma = \left(d\left(x_1/x_2\right)/dTMST_{X_1X_2}\right)\left(TMST_{x_1x_2}/\left(x_1/x_2\right)\right) = 1$$

$$TMST_{x_1x_2} = \frac{f'_{(x_2)}}{f'_{(x_1)}} = \frac{3(0,4)\;x_1^{0,6}\;x_2^{0,4-1}}{3(0,6)\;x_1^{0,6-1}\;x_2^{0,4}}$$

$$TMST_{x_1x_2} = \frac{0,4}{0,6}\frac{x_1}{x_2} \Rightarrow \frac{x_1}{x_2} = TMST_{x_1x_2}\frac{0,6}{0,4}$$

$$\frac{d(x_1/x_2)}{dTMST_{x_1x_2}} = \frac{0,6}{0,4}$$

$$\sigma = \left(d(x_1/x_2)/dTMST_{X_1X_2}\right)\left(TMST_{x_1x_2}/(x_1/x_2)\right)$$

$$= \frac{0,6}{0,4}\cdot\frac{(0,4/0,6)(x_1/x_2)}{(x_1/x_2)} = 1$$

3- مرونة الإنتاج بالنسبة لرأس المال:

$$e_{Qx_2} = \frac{\delta Q}{\delta x_2}\cdot\frac{x_2}{Q}$$

$$= \left[3(0,4)x_2^{-0,6}\,x_1^{0,6}\right]\frac{x_2}{3x_2^{0,4}\,x_1^{0,6}} = 0,4$$

أي أن الإنتاج Q سوف يزداد بمقدار 0,4% عندما يزداد حجم رأس المال بمقدار 1%.

مرونة لإنتاج بالنسبة للعمل:

$$e_{Qx_1} = \frac{\delta Q}{\delta x_1}\cdot\frac{x_1}{Q}$$

$$= \left[3(0,6)x_1^{-0,4}x_2^{0,4}\right]\frac{x_1}{3x_2^{0,4}\,x_1^{0,6}} = 0,6$$

4- لدينا: $Q = 3x_2^{0,4}\,x_1^{0,6}$

بتطبيق متطابقة أويلر:
$$x_2.\frac{\delta Q}{\delta x_2}+x_1\frac{\delta Q}{\delta x_1}=nQ$$

$$x_1\ (3\ (0{,}6)\ x^{-0,4}\ x_2^{0,4})\ +x_2\ \left(3\,(0{,}4)\ x_1^{0,6}\ \ x_2^{-0,6}\right)=3\ x_1^{0,6}\ x_2^{0,4}$$

وبما أن $\lambda = 3$ إذن:
$$Q=3(3x_1^{0,6}\ x_2^{0,4})$$

وهذا يدل على أن الإنتاج يتضاعف بمقدار ثلاث مرات أي أن مردودية عوامل الإنتاج ثابتة وهذه ميزة الدوال الخطية المتجانسة.

ويمكن بإدخال معامل لاقرانج
$$\begin{aligned}Q&=3(\lambda\,x_1)^{0,6}(\lambda\,x_2)^{0,4}\\&=\lambda\left(3\,x_1^{0,6}\,x_2^{0,4}\right)\\&=\lambda\ Q\end{aligned}$$

وبما أن $\lambda = 3$ إذن $\quad Q=3\,Q$

التمرين 7-2

1): حساب $\frac{\delta X}{\delta L}$ و $\frac{\delta X}{\delta K}$ بدلالة $\frac{X}{L}$ و $\frac{X}{K}$

لدينا:
$$X_{(K,L)}=A\left(\alpha\,K^{-P}+(1-\alpha)L^{-P}\right)^{-1/P}$$
$$X^{-P}=A^{-P}\left(\alpha\,K^{-P}+(1-\alpha)L^{-P}\right)$$

نفاضل طرفي:

$$-PX^{-P-1}\,dX=-P\,A^{-P}\alpha\ K^{-P-1}\ dK$$

$$-PX^{-P-1}\frac{dX}{dK}=-PA^{-P}\alpha\,K^{-P-1}$$

$$\frac{dX}{dK}=\frac{-PA^{-P}\alpha\,K^{-P-1}}{-PX^{-P-1}}=\frac{\alpha}{A^P}\left(\frac{X}{K}\right)^{P+1} \quad (1)$$

$$-PX^{-P-1}\,dX=-PA^{-P}(1-\alpha)L^{-P-1}dL$$

$$-P\,X^{-P-1}\frac{dX}{dL}=-P\,A^{-P}\,(1-\alpha)\,L^{-P-1}$$

$$\Rightarrow\frac{d\,X}{dL}=\frac{-PA^{-P}(1-\alpha)L^{-P-1}}{-P\,X^{-P-1}}=\frac{1-\alpha}{A^P}\left(\frac{X}{L}\right)^{P+1} \quad (2)$$

2) استنتاج $\frac{\delta K}{\delta L}$ بدلالة $\frac{K}{L}$

$$\frac{\partial K}{\partial L}=\frac{\partial X/\partial L}{\partial X/\partial K}=\frac{\left[(1-\alpha)/A^P\right](X/L)^{P+1}}{\left(\alpha/A^P\right)(X/K)^{P+1}}=\frac{1-\alpha}{\alpha}\left(\frac{K}{L}\right)^{P+1} \quad (3)$$

إثبات أن: $\sigma=\frac{d\left[Log(K/L)\right]}{d\left[Log\delta K/\delta L\right]}=1/(1+P)$

ندخل اللوغاريتم للعلاقة (3) نجد:

$$Log\frac{\partial K}{\partial L}=Log\left[\frac{1-\alpha}{\alpha}\right]\left(\frac{K}{L}\right)^{P+1}$$

$$Log\frac{\partial K}{\partial L}=Log\left[\frac{1-\alpha}{\alpha}\right]+Log\left(\frac{K}{L}\right)^{P+1}$$

$$Log\frac{\partial K}{\partial L} = Log\left[\frac{1-\alpha}{\alpha}\right] + (P+1)\,Log\left(\frac{K}{L}\right)$$

$$(P+1)\;Log\frac{K}{L} = Log\frac{\delta K}{\delta L} - Log\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)$$

نفاضل طرفي العلاقة الأخيرة نحصل على:

$$(P+1)\,d\;Log\frac{K}{L} = d\;Log\frac{\delta K}{\delta L} - dLog\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)$$

$$(P+1)\,dLog\frac{K}{L} = dLog\frac{\delta K}{\delta L}$$

$$(P+1) = \frac{d\log(\partial K/\partial L)}{d\log(K/L)}$$

ومنه نجد:

$$1/(1+\rho) = \frac{dLog\,(K/L)}{dLog\,(\partial K/\partial L)}$$

2- نركب دالة لاقرانج:

$$M(K,L,\lambda)=\omega\, L+r\,K+\lambda\left[X-A(\alpha\, K^{-P}+(1-\alpha)L^{-\rho}\right]^{-1/P}$$

$$\frac{\partial M}{\partial L}=M'_{(L)}=\frac{\partial C}{\partial L}-\lambda\frac{\partial X}{\partial L}=0\Rightarrow \omega=\lambda\,\frac{\partial X}{\partial L} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial M}{\partial K}=M'_{(K)}=\frac{\partial C}{\partial K}-\lambda\,\frac{\partial X}{\partial K}=0\Rightarrow r=\lambda\frac{\partial X}{\partial K} \qquad (2)$$

$$\frac{\partial M}{\partial \lambda}=X \qquad (3)$$

بقسمة المعادلتين 1 على 2 نجد:

$$(\partial X/\partial L)/(\partial X/\partial K)=(\omega/r)=(1/r)/(1/\omega)$$

ومنه نحصل على:

$$\left(\frac{1}{\omega}\right)\left(\frac{\partial X}{\partial L}\right)=\left(\frac{1}{r}\right)\left(\frac{\partial X}{\delta K}\right)$$

بضرب طرفي العلاقة (1) في L نجد:

$$\omega\, L=\lambda\, L\frac{\partial X}{\partial L} \qquad (4)$$

بضرب طرفي العلاقة (2) في K نجد:

$$rK=\lambda\, K\frac{\partial X}{\partial K} \qquad (5)$$

وبجمع المعادلتين (4 و5) نحصل على:

$$\omega L + r K = \lambda \left[L \frac{\partial X}{\partial L} + K \frac{\partial X}{\partial K} \right]$$

وبما أن الدالة متجانسة من الدرجة الأولى إذن:

$$L \frac{\partial X}{\partial L} + K \frac{\partial X}{\partial K} = X$$

ومنه:

$$\omega L + r K = \lambda X \qquad (6)$$

وعليه فإن $\lambda = P$ إذن تأخذ العلاقة 6 الشكل التالي:

$$\omega L + r K = PX$$

حساب $\frac{rK}{PX}$ و $\frac{\omega L}{PX}$ بدلالة $\frac{X}{L}$ و $\frac{X}{K}$

من المعادلة 1 لدينا: $\frac{\omega}{\lambda} = \frac{\partial X}{\partial L}$

وبما أن $P = \lambda$ إذن

$$\frac{\omega}{P} = \frac{\partial X}{\partial L} \qquad (7)$$

نضرب طرفي العلاقة 7 في $\left(\frac{L}{X} \right)$ وهذا وفق قانون المرونة

$$\frac{\omega}{P}.\frac{L}{X}=\frac{\partial X}{\partial L}.\frac{L}{X}=\frac{1-\alpha}{A^{p}}\left(\frac{X}{L}\right)^{p+1}.\frac{L}{X}$$

$$=\frac{1-\alpha}{A^{p}}\left(\frac{X}{L}\right)^{p+1}.\frac{L}{X}$$

$$\frac{\omega}{P}.\frac{L}{X}=(1-\alpha)\ A^{-P}\left(\frac{X}{L}\right)^{P}$$

من المعادلة 2 لدينا:

$$\frac{r}{\lambda}=\frac{\partial X}{\partial K}$$

وبإتباع المراحل السابقة نحصل على:

$$\frac{r}{P}.\frac{K}{X}=\alpha\ A^{-P}\left(\frac{X}{K}\right)^{P}$$

إذا كان $1>\sigma>0$ ، $P>0$ تنخفض حصة العمل لما الإنتاجية المتوسطة للعمل $\left(\frac{X}{L}\right)$ تتناقص.

المعلمة P تسمح بتغيير الإحلال بين العاملين رأس المال والعمل.

التمرين 8-2

1- لدراسة تجانس دالة كوب دوجلاس نفرض أن λ مؤشرا ما ونعوض في الدالة المذكورة عن كل من x و y على الترتيب

$$Q(\lambda x,\lambda y)=k(\lambda x)^{\alpha}\times(\lambda y)^{\beta}=\lambda^{\alpha+\beta}\,k\,x^{\alpha}y^{\beta}$$

$$=\lambda^{\alpha+\beta}Q$$

نستنتج من ذلك أن دالة كوب دوجلاس متجانسة من الدرجة $\alpha+\beta$

2- الإنتاجية الحدية بالنسبة لرأس المال نشتق العلاقة بالنسبة لــ x

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\alpha\, k\, x^{\alpha-1} y^{\beta}$$

الإنتاجية الحدية بالنسبة للعمل

$$\frac{\partial Q}{\partial y}=\beta\, k\, x^{\alpha} y^{\beta-1}$$

3- بما أن دالة كوب دوجلاس متجانسة من الرجة $\alpha+\beta$ فيمكن تطبيق نظرية أولر التي تكتب بالشكل:

$$x\frac{\partial Q}{\partial x}+y\frac{\partial Q}{\partial y}=(\alpha+\beta)Q$$

ولتحقق من ذلك نحسب الطرف الأول للعلاقة الأخيرة فيكون لدينا:

$$\begin{aligned}
x\frac{\partial Q}{\partial x}+y\frac{\partial Q}{\partial y} &= x\alpha\, k\, x^{\alpha-1} y^{\beta}+y\beta\, k\, x^{\alpha} y^{\beta-1}\\
&=(\alpha+\beta)k\, x^{\alpha} y^{\beta}\\
&=(\alpha+\beta)Q
\end{aligned}$$

4- المرونة الجزئية للإنتاج بالنسبة لرأس المال

$$EQ/Ex = \frac{\partial Q}{\partial x} \times \frac{x}{Q} = \alpha\, k\, x^{\alpha-1} y^{\beta} \frac{x}{k\, x^{\alpha} y^{\beta}}$$

وبعد الاختصار نحصل على: $EQ/Ex = \alpha$

وبنفس الطريقة السابقة نحصل على المرونة الجزئية للإنتاج بالنسبة للعمل

$$EQ/Ey = \beta$$

نلاحظ أن الثوابت α و β في دالة كوب دوجلاس ذات معنى اقتصادي فهي بالضبط المرونات الجزئية للدالة بالنسبة لمتغيراتها x و y بمعنى α تعبر عن معدل التغير النسبي للإنتاج إلى معدل التغير النسبي في رأس المال، كما تعبر β عن معدل التغير النسبي للإنتاج إلى معدل التغير النسبي للعمل.

3- من أجل مستوى معين في اللإنتاج قدره Q_0 تصبح العلاقة (1) التي تعبر عن دالة كوب دوجلاس بالشكل:

$$Q_0 = k\, x^{\alpha} y^{\beta} \qquad (2)$$

حيث Q_0 ثابت موجب، تحدد العلاقة (2) منحنى الناتج المتساوي الموافق لمستوى من الإنتاج قدره Q_0 وهي تعبر عن القانون التي بموجبه الإحلال بين رأس المال و العمل مع المحافظة على مستوى معين من الإنتاج قدره Q_0.

لنفرض الآن أن y دالة لـــ x و لنبحث عن طبيعة الخط البياني الممثل لتغيرات الدالة y عندما يتغير x شريطة ان يبقى موجبا، لهذا الغرض نشتق العلاقة (2) بالنسبة لـــ x

$$x\alpha\, k\, x^{\alpha-1} y^{\beta} + y\beta\, k\, x^{\alpha} y^{\beta-1}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\alpha\, k\, x^{\alpha-1} y^{\beta}}{\beta\, k\, x^{\alpha} y^{\beta-1}}$$

أو: $$\frac{dy}{dx} = -\frac{\alpha}{\beta}\frac{y}{x} \qquad (3)$$

وهي كمية سالبة دوما لأن كلا من x, y, β, α كميات موجبة.

ولحساب المشتق الثاني لـــ y بالنسبة لـــ x نشتق العلاقة (3) بالنسبة لـــ x نحصل على:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\alpha}{\beta}\frac{y}{x} - \frac{\alpha}{\beta x}\frac{d\,y}{d\,x}$$

وبالتعويض عن $\frac{dy}{dx}$ بقيمتها من العلاقة (3) نحصل على:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\alpha(1+\alpha)\, y}{\beta\,(1+\beta)\, x^2}$$

وهي كمية موجبة دائما.

نستنتج مما سبق أن الخط البياني الممثل لتغيرات y عندما تتحول x متناقص دوما ويتجه تقعره نحو الأعلى.

التمرين 9-2

تدل العبارة $\frac{dQ}{da}$ على المشتق Q بالنسبة للمتغير a ولإيجاد العلاقة بين

Q و a فقط يكفي أن نحذف P من جملة المعادلتين المفروضتين:

$$f(Q,a) - P = 0$$

$$g(Q) - P = 0$$

نحصل على:

$$f(Q,a) = g(Q)$$

نشتق العلاقة الأخيرة بالنسبة لـ a نجد:

$$\frac{\partial f}{\partial Q} \times \frac{dQ}{da} + \frac{\partial f}{\partial a} = \frac{dg}{dQ}\frac{dQ}{da}$$

$$\frac{dQ}{da}\left[\frac{dg}{dQ} - \frac{\partial f}{\partial Q}\right] = \frac{\partial f}{\partial a}$$

وبفرض أن $\frac{dQ}{da} \neq 0$ يمكن أن نكتب:

$$\frac{dQ}{da} = \frac{\partial f / \partial a}{\frac{dg}{dQ} - \frac{\partial f}{\partial Q}}$$

نستنتج من العلاقة الأخيرة أن $\frac{dQ}{da} \succ 0$ وذلك لأنه موجب بالفرض لدينا

$$\frac{\partial f}{\partial a} \succ 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial Q} \prec 0 \quad , \quad \frac{dg}{dQ} \succ 0$$

لحساب المقدار $\frac{dP}{da}$ يكفي أن نعتبر P دالة للمتغير الوحيد a ويتم ذلك بملاحظة أن P يتبع Q بموجب العلاقة المفروضة.

$$g(Q) - P = 0$$

كما أن Q يتبع a وفق العلاقة $f(Q, a) = g(Q)$

وعليه نكتب:

$$\frac{dP}{da} = \frac{dP}{dQ} \times \frac{dQ}{da} = \frac{dg}{dQ}\frac{dQ}{da}$$

أو

$$\frac{dP}{da} = \frac{\partial f / \partial a}{\dfrac{dg}{dQ} - \dfrac{\partial f}{\partial Q}} \times \frac{dg}{dQ}$$

وإذا كانت $\frac{dg}{dQ}$ و$\frac{dQ}{da}$ موجبتين نستنتج أن $\frac{dP}{da}$ موجبة.

تفيد المتراجحتين $\frac{dQ}{da} \succ 0$ و $\frac{dP}{da} \succ 0$ لتوضيح أنه عندما يتزايد تفضيل المستهلك لهذه السلعة عن غيرها يزداد إنتاج السلعة كما يزداد سعرها أيضا. وتدل القيمة $\frac{dQ}{da}$ على مقدار التزايد الذي يطرأ على كمية الإنتـــاج

Q فيما لو تزايدت قيمة المؤشر a بمقدار وحدة واحدة فقط كما تدل $\frac{dP}{da}$ على تزايد الذي يطرأ على السعر فيما لو تزايدت قيمة المؤشر a بمقدار وحدة واحدة.

التمرين 10-2

I) $Xd_1 = X_{s1}$

$$18 - 3P_1 + P_2 = -2 + 4P_1$$
$$7P_1 - P_2 = 20 \qquad (1)$$
$$Xd_2 = X_{s2}$$
$$12 + P_1 - 2P_2 = -2 + 3P_2$$
$$5P_2 - P_1 = 14 \qquad (2)$$

وبإصلاح المعادلتين نجد: $\bar{P_2} = 5,05 \qquad \bar{P}_1 = 5,29$

$$X_{d1} = X_{s1} = 11,41$$
$$X_{d2} = X_{s2} = 8,41$$

2) عند فرض ضريبة نوعية

$$X_{s1} = -2 + 4(P_1 - t_1)$$
$$= -2 + 4(P_1 - 3)$$
$$X_{s1} = -14 + 4P_1$$

$$X_{s2} = -2 + 3(P_2 - t_2)$$
$$= -2 + 3[P_2 - 2]$$
$$X_{s2} = -8 + 3P_2$$

نعوض في شرطي التوازن

$$18 - 3P_1 + P_2 = -14 + 4P_1 \qquad (3)$$
$$12 + P_1 - 2P_2 = -8 + 3P_2 \qquad (4)$$

بإصلاح المعادلتين 3 و4 نحصل على:

$$\overline{P}_2 = 5{,}05 \quad ، \overline{P}_1 = 5{,}29$$

ومنه

$$\overline{X}_1 = \overline{X}_{S1} = 7{,}16$$
$$\overline{X}_2 = \overline{X}_{S2} = 7{,}15$$

3) عند فرض ضريبة قيمية

$$X_{s1} = -2 + 4P_1(1 - t_1)$$
$$= -2 + 4P_1(1 - 0{,}20)$$
$$X_{s1} = -2 + 3{,}2P_1$$

$$X_{s2} = -2 + 3P_2(1 - t_2)$$
$$= -2 + 3P_2(1 - 0{,}15)$$
$$X_{s2} = -2 + 2{,}55P_2$$

نعوض في شرطي التوازن نحصل على:

$$\overline{P}_2 = 3{,}92 \quad ، \overline{P}_1 = 3{,}85$$
$$\overline{X}_1 = \overline{X}_{s1} = 10{,}32$$
$$\overline{X}_2 = \overline{X}_{s2} = 7{,}99$$

التمرين 11-2

نكتب معادلات النموذج:

$$Y = C + I + G \qquad (1)$$

$$C = a + bY_d$$

$$Y_d = Y - T$$

$$C = a + b(Y - T)$$

وبما أن $b = 0,8$ [الميل الحدي للاستهلاك] يمكن أن نشكل المعادلات التالية:

$$C = a + 0,8\ (Y - T)$$

$$T = tY$$

$$I = I_0 = (1/4)\ Y$$

$$G = G_0 = 2\ a$$

نعلم أن مضاعف الاستثمار يساوي:

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial I_0} = \frac{1}{1 - b + bt} = \frac{1}{1 - b(1 - t)}$$

$$2,5 = \frac{1}{1 - b(1 - t)} = \frac{1}{1 - 0,8\ (1 - t)} = 1$$

$$2,5 = [1 - 0,8\ (1 - t)] = 1$$

$$2,5 - 2 + 2\,t = 1 \Rightarrow 2\,t = 1 - 0,5$$

$$\Rightarrow t = \frac{0,5}{2 = 0,5} = 0,25$$

ومنه نجد:

$$T = 0,25\ Y$$

$$G_0 = 2\ a$$

$$I = 0,25\ Y$$

نعوض في المعادلة 1 بـــ G، I و C نحصل على:

$$Y = a + 0{,}8[Y - 0{,}25Y] + 0{,}25\,Y + 2\,a$$

$$Y = a + 0{,}8\,Y - 0{,}2\,Y + 0{,}25\,Y + 2\,a$$

$$Y = 3\,a + 0{,}85\,Y$$

$$Y - 0{,}85\,Y = 3\,a$$

$$a = 0{,}05\,Y$$

وبما أن الإيراد = الضرائب بالنسبة للحكومة فإن:

$$T - G_0 = 600$$

$$0{,}25\,Y - 2\,a = 600$$

$$0{,}25\,Y - 2\,(0{,}05\,Y) = 600$$

$$0{,}25\,Y - 0{,}1\,Y = 600$$

$$\bar{Y} = \frac{600}{0{,}15} = 4000$$

وانطلاقا من النتائج المتحصل عليها أعلاه يمكن أن نجد:

حجم الضريبة: $\bar{T} = 1000$

حجم الاستهلاك المستقل: $a = 200$

مستوى الاستهلاك الخاص: $\bar{C} = 2600$

حجم الاستثمارات: $I_0 = 1000$

الإنفاق العام: $G_0 = 400$

حل تمارين للفصل الثالث

التمرين 3-1

1) $I = 4\sqrt{1+\sqrt{x}} + C$

2) $I = \frac{a^x}{Loga} - \frac{2}{\sqrt{x}} + C$

3) $I = \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - 2\sqrt{x+1} + C$

4) $I = \sqrt{9+4x^2} + C$

5) $I = \frac{1}{6} arc\ tg\ x^6 + C$

6) $I = \frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2} - 3\sqrt[3]{x+1} + + 3Log\left|\sqrt[3]{x+1} + 1\right| + C$

7) $I = \frac{1}{2} Log\ |Log\ x| + C$

8) $I = \frac{1}{6\sqrt{2}} log\left|\frac{\sqrt{2}+x^3}{\sqrt{2}-x^3}\right| + C$

9) $I = \frac{3}{4}\left(x^4+1\right)^{2/3} - \frac{3}{4}\left(x^4+1\right)^{1/3} + \frac{3}{4}\log\left|1+\left(x^4+1\right)^{1/3}\right| + C$

10) $I = -\sqrt{1-e^{-2x}} + \frac{1}{2} Log\left|\frac{1+\sqrt{1-e^{-2x}}}{1-\sqrt{1-e^{-2x}}}\right| + C$

11) $I = \frac{1}{4\sqrt{3}} arc\ tg\sqrt{3}\ x^4 + C$

12) $I = \sqrt{\left(1+x^{1/3}\right)^3} + C$

13) $I = -\frac{1}{b\sqrt{a+bx^2}} + C$

14) $I = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right| + C$

15) I= $x(Log\,x)^2 - 2x\,Log\,x + 2x + C$

16) I= $3x^{1/3} - 12x^{1/6} + 24\log\left| x^{1/6} + 2\right| C$

17) I= $\frac{4}{7}\left(e^x + 1\right)^{7/4} - \frac{4}{3}\left(e^x + 1\right)^{3/4} + C$

18) I= $\frac{\sqrt{2x+1}}{log\,3} e^{\sqrt{2x+1}\,log\,3} - \frac{1}{(Log\,3)^2} e^{\sqrt{2x+1}\,Log\,3}$

19) I= $-2(2x-1)^{1/4} - 2Log\left|\sqrt[4]{2x-1} - 1\right| + C$

20) I= $\frac{2}{3}x^{3/2} - 3x - Log|x| + 6\sqrt{x} + C$

21) $I = \frac{1}{4}\log\left|x^4 - 2\right| - \frac{1}{\left(x^4 - 2\right)} + C$ 21)

التمرين 2-3

$$CT = \int Cmg + c$$

$$CT = \int\left(0{,}06x^2 - 0{,}2x + 10\right)dx$$

$$CT = 0{,}02x^3 + 0{,}1x^2 + 10x + 6000$$

التكلفة المتوسطة Cm هي: $Cm = CT / x$

$$Cm = 0,02x^2 + 0,1x + 10 + 6000 / x$$
$$= 0,02(240)^2 + 0,1(240) + 10 + 6000 / 240 = 1163$$

التمرين 3-3

$$Cm = CT / Q = Q^2 - 6Q + 24$$
$$Cmg = dCT / dQ = 3Q^2 - 12Q + 24$$
$$\pi = \int_0^Q (P - Cmg)\,dQ$$
$$\pi = \int_0^Q (P)\,dQ - \int_0^Q Cmg\,dQ$$
$$\pi = [P\,Q]_0^Q - [Cmg\,Q]_0^Q$$
$$\pi = [24Q]_0^Q - [Q^3 - 6Q^2 + 24Q]_0^Q$$
$$\pi = -Q^3 + 6Q^2$$

وعند إستخدام $\pi = Q(P - Cm)$

$$\pi = QP - CmQ$$

فإننا نصل إلى: $\pi = -Q^3 + 6Q^2$

إذن يمكن أن نعبر عن دالة الربح بإحدى الصيغتين

التمرين 4-3

- نستخرج دالة الإنتاج الكلي:

$$PPmg_L = \frac{dQ}{dL} = 60 - 10L$$

$$\int dQ = \int (60 - 10L)\, dL$$

$$Q = 60L - 5L^2 + C$$

نستخرج ثابت التكامل عندما $(L = 0)$ و $(Q = 3500)$ نجد: $(C = 3500)$ ومنه تكون دالة الإنتاج الكلي كما يلي:

$$Q = 60L - 5L^2 + 3500$$

ولمعرفة آثر إضافة 20 عاملا على حجم الإنتاج نعوض بـــ $(L = 20)$ في دالة الإنتاج الكلي نجد: $Q = 2700$

نلاحظ عند إضافة $(L = 20)$ عاملا انخفض الإنتاج من 3500 إلى 2700 يدل على حالة تناقص حجم الغلة التي تمر بها المؤسسة.

التمرين 5-3

1- دالة الإيراد الكلي هي عبارة عن تكامل الإيراد الحدي

$$RT = \int Rmg\, dQ$$

$$RT = \int (120 - 6Q)\, dQ$$

$$RT = 120Q - 3Q^2 + C$$

إن الثابت C في دالة الإيراد الكلي غير ذي معنى، وذلك لأن دوال الإيراد تكون مرتبطة مع كميات السلع حصرا ولايوجد قيمة للثابت فيها

إلا إذا كان هناك إيرادات متحققة من غير طريق بيع السلعة أي دالة الإيراد الكلي الأصلية تكون وفق الصيغة التالية:

$$RT = 120Q - 3Q^2$$

وتكون قيمة الإيراد الكلي عندما $Q = 30$ محدد بـــ $RT = 900$

2- السعر هو عبارة عن دالة الإيراد المتوسط أي:

$$P = Rm = \frac{RT}{Q} 120 - 3Q$$

ومنه نجد: $P = 30$

لمعرفة مقدار التغير في الإيراد الكلي عند زيادة القيمة المنتجة من السلعة بنسبة 10% يكفي أن نحسب قيمة التكامل المحدد كما يلي:

$$RT = \int_{30}^{33} Rmg \, dQ$$

$$RT = \int_{30}^{33} (120 - 6Q) \, dQ$$

$$RT = \left(120Q - 6Q^2\right)_{30}^{33}$$

$$RT = -207$$

أي أن الإيراد انخفض بـــ270 وحدة

نعوض عن قيمة الإنتاج الجديد في دالة الإيراد المتوسط لتحديد التغيرات في السعر نجد $P = 21$ هذا الانخفاض ناتج عن الزيادة في الكميات المنتجة كما يفسر بانخفاض الإيراد الكلي.

حل تمارين الفصل الرابع

التمرين 1-4

$$R_1 : y = 1 - A\sqrt{\frac{1-x}{x}}$$

$$R_2 : y = x^4 \left[\log\sqrt{x} + \beta\right]$$

نأخذ y دالة و x متغير مستقل

$$R_3 : y = \frac{1}{2}\log\left|2k - 2e^x\right|$$

$$R_4 : y = Ae^{1/3}$$

بأخذ x دالة و y متغير مستقل

$$R_5 : x = \frac{Ay}{y+1} + 1$$

$$R_6 : A(y-x)^3$$

نجعل x دالة و y متغير مستقل

$$R_7 : x = y\left[\log|y| + k\right]$$

$$R_8 : y = \frac{1}{\log x + 1 + \beta x}$$

$$R_9 : y = \frac{1}{\sqrt{1 + \beta\, e^{x^2}}}$$

بأخذ x دالة و y متغير مستقل

$$R_{10} : x = \frac{y^4}{2} + \beta\, y^2$$

$$R_{11} : y = \frac{1}{\sqrt{2xe^{-x^2} + \beta\, e^{-2x}}}$$

$$R_{12} : y = \sqrt{\beta\, x\, e^{-y/x}}$$

التمرين 2-4

$$-\frac{dy}{dx}=\frac{\alpha}{\beta}\frac{y+b}{x+a}$$

$$\alpha\,(y+b)\,dx=-\beta\,(x+a)\,dy$$

بقسمة طرفي العلاقة الأخيرة على $\beta\,\alpha\,dy\,dx$ نجد:

$$\frac{\beta\,dy}{y+b}=-\frac{\alpha\,dx}{x+a}$$

$$\beta\int\frac{dy}{y+b}=-\alpha\int\frac{dx}{x+a}$$

وعند حساب التكامل نجد:

$$\log(y+b)^{\beta}+\log(x+a)^{\alpha}=k$$

$$\log(y+b)^{\beta}(x+a)^{\alpha}=k$$

$$(y+b)^{\beta}(x+a)^{\alpha}=\ell^{k}$$

ومنه فإن:

$$(y+b)^{\beta}(x+a)^{\alpha}=U$$

التمرين 3-4

من قانون المرونة الطلب المباشرة:

$$e_{QQ}=\frac{dQ}{dP}\frac{P}{Q}$$

$$a-bP=\frac{dQ}{dP}\frac{P}{Q}$$

بإصلاح العلاقة الأخيرة نجد:

$$\frac{(a-bP)}{P}dP = \frac{dQ}{Q}$$

وبإدخال رمز التكامل بعد فصل المتغيرات نجد:

$$\log|Q| = \log|P|^{a} - bP + k$$

$$Q = \ell^{\log P^{a} - bP + k}$$

ومنه نجد الدالة:

$$Q = A\,P^{a}\,\ell^{-b\,P}$$

التمرين 4-4

يتحدد شرط التوازن بالعلاقة التالية:

$$Y(t) = C(t) + I(t)$$

$$Y(t) = (1-s)\,Y(t) + \frac{dK}{dt} + \mu\,K(t)$$

وبإصلاح العلاقة الأخيرة نجد معادلة التوازن لهذا النظام:

$$(\mu\,k - s)\,Y(t) + k\frac{dY}{dt} = 0$$

اذا كانت $\mu\,k = s$ فإن: $Y(t) = Y_{(0)} = Y_{0}$

إذا كانت $\mu\,k \neq s$ فإن: $Y(t) = Y_{0}\ell^{(\frac{s}{k} - \mu)t}$

إذا كان $\mu\,k \succ s$ فإن: $Y(t) \rightarrow 0$ لما $t \rightarrow \infty$

إذا كان $\mu\,k \prec s$ فإن: $Y(t) \rightarrow \infty$ لما $t \rightarrow \infty$

$$(\mu - \frac{s}{k}) Y(t) + \frac{dY}{dt} = -\frac{A}{k} \ell^{\alpha t} \qquad -2$$

$$\frac{dY}{dt} + \frac{1}{30} Y = -\frac{1}{3} A \ell^{\alpha t}$$

$$Y(t) = \left[Y + \frac{10}{1 + 30\alpha} A \right] \ell^{-\frac{t}{30}} - \frac{10}{1 + 30\alpha} A \ell^{\alpha t}$$

$A \in IR_-^*$ إذا كان $t \to \infty$ لما $Y(t) \to \infty$

حل تمارين الفصل الخامس

التمرين 1-5

حل معادلات الفروق المنتهية التالية باستخدام الطريقة العامة

1) $$y_{t+1} = 25 - y_t$$
$$y_t = y_0 + 25(t)$$
$$y_t = 40 + 25t$$

2) $$y_{t+1} = \frac{1}{2} y_t + 9 \qquad (1)$$
$$a = 1/2 \qquad ,b = 9$$

$$y_t = [y_0 - 9/(1-1/2)][1/2]^t + 9/[1-(1/2)]$$
$$y_t = (-8)(1/2)\, t + 18. \qquad (2)$$

اختبار النتيجة: نعوض عن $t = 0$ و $t = 1$ في (1) نحصل على:

$$y_0 = (-8)(1/2)^0 + 18 = 10$$
$$y_1 = (-8)(1/2)^1 + 18 = 14$$

نعوض بـ $y_1 = 14$ لـ y_{t+1} و بـ $y_0 = 10$ لـ y_t

$$14 = (1/2)(10) + 9$$

3) $$2\,y_{t+5} = 4\,y_{t+4} + 8$$
$$y_{t+5} = 2\,y_{t+4} + 4$$
$$y_t = 2y_{t-1} + 4 \qquad (1)$$

$b=4$ و $a=2$ إذن:

$$y^t = [y_t - b/(1-a)][a]^t + b/(1-a)$$
$$= [6-4/(1-2)][2]^t + 4/(1-2)$$
$$y_t = 10\,(2)^t - 4$$

اختبار النتيجة: نعوض عن y_0 و y_1 في (2)

$$y_0 = 10(2)^0 - 4 = 6$$
$$y_1 = 10(2)^1 - 4 = 16$$

نعوض عن $y_1 = 16$ لـــ y_t و $y_0 = 6$ لـــ y_{t-1}

$$16 = 2(6) + 4$$

4) $y_{t+1} - y_t = y_t + 10$

$$y_{t+1} = 2y_t + 10 \qquad (1)$$

$b = 10$ ،$a = 2$

$$y_t = [y_0 - b/(1-a)]\,[a]^t + b/(1-a)$$
$$y_t = [45 - 10/(1-2)]\,[2]^t + 10/(1-2)$$

$$y_t = (55)(2)^t - 10$$

للاختبار: $t=0$، $t=1$

$$y_0 = (55)\,(2)^0 - 10 = 45$$
$$y_1 = (55)(2) - 10 = 100$$

نعوض عن $y_0 = 45$ لـ y_t و $y_1 = 100$ لـ y_{t+1} في المعادلة 1

$$100 = 2(45) + 10$$

التمرين 2-5

لدينا $a = -\frac{1}{4}, \quad b = 5, \quad y_0 = 2$

طريقة الحل العام لحساب المسار الزمني هي:

$$y_t = [y_0 - b/(1-a)]\,[a]^t + b/(1-a)$$
$$y_1 = [2 - 5/[1-(-1/4)]\,]\,[-1/4]^1 + 5/[1-(-1/4)]$$
$$= (2-4)(-1/4) + 4 = 4{,}5$$
$$y_2 = [2 - 5/(1+1/4)]\,[-1/4]^2 + 5/[1+(1/4)] = 3{,}87$$
$$y_3 = -2(-1/4)^3 + 4 = 4{,}03$$

نلاحظ أن قيمة (a^t) تقترب من الصفر بمرور الزمن وأن قيمة a محصورة بين $-1 \langle a \langle 0$ من خلال النتائج يتبين أن الدخل الوطني يقترب بمرور الزمن من حالة التوازن لأن قيمة الدخل ألتوازني يمثلها جزء الحل العام التالي: $\frac{b}{1-a} = \frac{5}{1+(1/4)} = 4$

كما تمثل هذه الحالة التذبذب المتناقص [الخامد].و بما أن $a = -\frac{1}{4} \langle 0$ و $|a| \langle 1$ فإن المسار الزمني متباعد].

التمرين 3-5

$$y_t = C_t + I_t$$
$$= 2000 + 0,9\,y_{t-1}$$
$$a = 2100 \qquad b = 0,9 \qquad y_0 = 4500$$
$$y_t = [y_0 - b/(1-a)]\,[a]^t + b/(1-a)$$

$$y_1 = [4500 - 2100/(1-0,9)][0,9]^1 + 2100/(1-0,9)$$
$$= -16500(0,9) + 21000 = 3250$$
$$y_2 = -16500(0,9)^2 + 21000 = 7635$$
$$y_3 = -16500(0,9)^3 + 21000 = 8971,5$$

حيث أن a=0,9 وهي $0 \langle a \langle 1$ وتبيّن أن الدخل سوف يتجه نحو حالة التوازن بمرور الزمن لأن (a^t) تتجه نحو الاضمحلال بزيادة t [التذبذب تنازلي].

التمرين 4-5

أ) نبحث عن P_e حيث

$$Q_s = Q_d$$
$$P_t = P_{t-1} = P_e$$
$$220 - 0,4P_e = -30 + 0,6P_e$$
$$P_e = 250$$

أو

$$P_e = \frac{a+\alpha}{b+\beta} = \frac{220+30}{0,6+0,4} = 250$$

• تحديد المسار الزمني باستخدام طريقة السعر التوازني: -

$$P_t = [P_0 - P_e][-\beta / b]^t + P_e$$
$$Q_d = Q_S$$
$$220 - 0{,}4\ P_t = -30 + 0{,}6\ P_{t-1}$$
$$P_t = -1{,}5\ P_{t-1} + 625$$
$$P_t = [254 - 250][-0{,}6 / 0{,}4]^t + 250$$
$$P_t = 4\ (-1{,}5)^t + 250$$

اختبار المسار الزمني للسعر عند $[t = 0, 1, 2]$

$$t = 0 \Rightarrow P_0 = 4\ (-1{,}5)^0 + 250 = 254$$
$$t = 1 \Rightarrow P_1 = 4(-1{,}5)^1 + 250 = 244$$
$$t = 2 \Rightarrow P_2 = 4(-1{,}5)^2 + 250 = 259$$
$$244 = -(1{,}5)(254) + 625$$

* تحديد المسار الزمني باستخدام طريقة الحل العام

$$P_t = \left[P_0 - \frac{b}{1-a}\right][a]^t + \frac{b}{1-a}$$
$$= \left[254 - \frac{625}{1-(-1{,}5)}\right][-1{,}5]^t + \frac{625}{1-(-1{,}5)}$$
$$= [254 - 250][-1{,}5]^t + 250$$
$$= 4(-1{,}5)^t + 250$$

$|a| \rangle 1$ مسار زمني متذبذب متفجر متباعد

التمرين 5-5

1- عند التوازن $QD_t = QO_t$

حيث: $bP_t + dP_{t-1} = a - c$

إذن يتحدد الحل لهذا النموذج بالنتيجة التالية:

$$P_t = \left(P_0 - \frac{a-c}{b+d}\right)\left(-\frac{d}{b}\right)^t + \frac{a-c}{b+d}$$

إذا كانت $d \prec b$ يتحقق التوازن عند السعر التوازني $\frac{a-c}{b+d}$ الذي يكون مستقلة عن P_0.

2- عند التوازن فإن: $QD_t = QO_t$

حيث: $P_{t+1} - [1 - \sigma(b+d)]P_t = \sigma(a-c)$

وتكون نتيجة الحل:

$$P_t = \left[P_0 - \frac{a-c}{b+d}\right][1 - \sigma(b+d)]^t + \frac{a-c}{b+d}$$

إذا كانت $\sigma \prec 2/(b+d)$ يتحقق التوازن عند السعر التوازني $\frac{a-c}{b+d}$

التطبيق العددي:

$$P_t = (P_0 - 3)(-1{,}4)^t + 3$$

المسار متذبذب متفجر

تمارين الفصل السادس

التمرين 1-6

أ) نعوض عن (4) و (5) في (1) نحصل على:

$$Y = C + 30 + 20$$
$$C = 60 + 0,7(Y - T)$$
$$T = 0,3Y$$

ومنه نحصل على المعدلات التالية:

$$Y - C = 50$$
$$-0,7Y + C + 0,7T = 60$$
$$-0,3Y + T = 0$$

$$1Y - 1C + 0T = 50$$
$$-0,7Y + 1C + 0,7T = 60$$
$$-0,3Y + 0C + 1T = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -0,7 & 1 & -0,7 \\ -0,3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ C \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 60 \\ 0 \end{bmatrix}$$

نستخدم طريقة كرامر لإيجاد $\overline{Y}$ و $\overline{C}$ و $\overline{T}$

1) نحسب $|A|$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \vdots & 1 & -1 \\ -0,7 & 1 & 0,7 & \vdots & -0,7 & 1 \\ -0,3 & 0 & 1 & \vdots & -0,3 & 0 \end{vmatrix} = 0,51$$

وبتطبيق طريقة كرامر نحصل على القيم التوازنية

$$\bar{T} = 64{,}70 \qquad \bar{C} = 84{,}5 \qquad \bar{Y} = 215{,}68$$

ب) عندما $t = 0{,}20$ يكون

$$T = 0{,}20\,Y$$
$$Y = 60 + 0{,}7(Y - 0{,}20\,Y) + 50$$
$$Y = 110 + 0{,}564$$

ومنه نحصل على:

$$Y(1 - 0{,}56) = 110 \Rightarrow \bar{Y} = \frac{110}{0{,}44} = 250$$
$$\bar{T} = 0{,}20(250) = 50$$
$$\bar{C} = 60 + 0{,}7(250 - 50) = 200$$

نلاحظ أن انخفاض معدل الضريبة أدى إلى ارتفاع الدخل التوازني وحجم الاستهلاك وانخفاض حجم الضريبة من 64,70 إلى 50 وحدة نقدية.

جـ) t=0,40

$$Y = 60 + 0{,}7\,(Y - T) + 50$$
$$= 110 + 0{,}7\,(Y - 0{,}40\,Y)$$
$$= 110 + 0{,}42\,Y$$

$$\bar{Y} - 0{,}424 = 110 \Rightarrow \bar{Y} = \frac{110}{0{,}58} = 189{,}65$$
$$\bar{T} = 0{,}40\,(189{,}65) = 75{,}86$$
$$\bar{C} = 60 + 0{,}7\,(189{,}65 - 75{,}86) = 139{,}65$$

نلاحظ انخفاض في الدخل التوازني في حين أرتفع $\overline{T}$ بينما انخفض مستوى الاستهلاك

د) $Y = 240$ $\quad t = ?$

$$Y = 60 + 0,7\,(Y - T) + 50$$
$$240 = 60 + 0,7\left[240 - T\right] + 50$$
$$240 = 110 + 168 - 0,7\,T$$
$$0,7T = 30 \Rightarrow T = \frac{30}{0,7} = 54,29$$
$$T = t.Y \Rightarrow t = \frac{T}{Y} = 22,6\%$$

التمرين 2-6

بافتراض أن الاقتصاد في حالة التوازن فإن:

$$Y = C + I + G + X - M \qquad (6)$$

تعويض عن (2)، (3) و (4) في (6) نحصل على:

$$Y = C + 30 + 50 + 35 - M$$
$$Y - C + M = 115 \qquad (7)$$

من 1 نحصل على:

$$-0,75\,Y + C = 20 \qquad (8)$$

من 5 نحصل على:

$$-0,2\,Y + M = 5 \qquad (9)$$

نضع المعادلات 7، 8 و9 على شكل مصفوفات:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -0,75 & 1 & 0 \\ -0,2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y \\ C \\ T \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 115 \\ 20 \\ 5 \end{bmatrix}$$

باستخدام طريقة كرامر نحصل على $\overline{M},\overline{C},\overline{Y}$ القيم التوازنية

ب) نحسب $|A|$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \vdots & 1 & -1 \\ -0,75 & 1 & 0,7 & \vdots & -0,75 & 1 \\ -0,2 & 0 & 1 & \vdots & -0,2 & 0 \end{vmatrix}=0,45$$

البحث عن قيمة $\overline{Y}$

$$|A_1|=\begin{vmatrix} 115 & -1 & 1 & \vdots & 115 & -1 \\ 20 & 1 & 0 & \vdots & 20 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & \vdots & 5 & 0 \end{vmatrix}=130$$

$$\overline{Y}=\frac{|A_1|}{|A|}=\frac{130}{0,45}=288,88$$

وبنفس الطريقة نحصل على:

$$\overline{M}=62,77 \qquad \overline{C}=106,5$$

التمرين-3 -6

- نقوم بحساب $[I-A]$

$$[I-A]=\begin{bmatrix} 0,6 & -0,1 & -0,1 \\ -0,1 & 0,6 & -0,1 \\ -0,1 & -0,1 & 0,6 \end{bmatrix}$$

-حساب $|I-A|=0,196$

حساب المصفوفات المرافقات

$$C(A)=\begin{bmatrix} 0,35 & 0,07 & 0,07 \\ 0,07 & 0,35 & 0,07 \\ 0,07 & 0,07 & 0,35 \end{bmatrix} \rightarrow C'(A)=adjA=\begin{bmatrix} 0,35 & 0,07 & 0,07 \\ 0,07 & 0,35 & 0,07 \\ 0,07 & 0,07 & 0,35 \end{bmatrix}$$

$$[I-A]^{-1}=\frac{1}{|I-A|}adj[I-A]=\begin{bmatrix} 1,78 & 0,35 & 0,35 \\ 0,35 & 1,78 & 0,35 \\ 0,35 & 0,35 & 1,78 \end{bmatrix}$$

- حساب مستويات الإنتاج لكل قطاع باستخدام العلاقة التالية:

$$X=[I-A]^{-1}Y$$

$$X=\begin{bmatrix} 1,78 & 0,35 & 0,35 \\ 0,35 & 1,78 & 0,35 \\ 0,35 & 0,35 & 1,78 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 700 \\ 2100 \\ 1400 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2471 \\ 4473 \\ 3472 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} X_1' \\ X_2' \\ X_3' \end{bmatrix}$$

- زيادة X_1 بوحدة واحدة من 700 إلى 701

$$X = [I - A]^{-1} Y$$

$$\begin{bmatrix} X'_1 \\ X'_2 \\ X'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,78 & 0,35 & 0,35 \\ 0,35 & 1,78 & 0,35 \\ 0,35 & 0,35 & 1,78 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 701 \\ 2100 \\ 1400 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2472,78 \\ 4473,35 \\ 3472,35 \end{bmatrix}$$

$$\Delta X_1 = X'_1 - X_1$$
$$= 2472,78 - 2471 = 1,78$$
$$\Delta X_2 = 4473,35 - 4473 = 0,35$$
$$\Delta X_3 = 3742,75 - 3472 = 0,35$$
$$\sum \Delta X_i = 1,78 + 0,35 + 0,35 = 2,48$$

$$M_{11} = \frac{\Delta X_1}{\Delta Y_1} = \frac{1,78}{1} = 1,78$$

$$M_{21} = \frac{\Delta X_2}{\Delta Y_1} = \frac{0,35}{1} = 0,35$$

$$M_{31} = \frac{\Delta X_3}{\Delta Y_1} = \frac{0,35}{1} = 0,35$$

مضاعف القطاع X_1 بالنسبة للاقتصاد ككل يساوي مجموع عناصر العمود الأول في المصفوفة $[I - A]^{-1}$

التمرين 4-6

-1 $$a_{ij} = \frac{X_{ij}}{Y_i}$$

$$a_{11} = \frac{X_{11}}{Y_1} = \frac{40}{260} = 0,15$$

$$a_{12} = \frac{X_{12}}{Y_2} = \frac{50}{300} = 0,17$$

$$a_{13} = \frac{60}{370} = 0,16$$

$$a_{33} = \frac{40}{370} = 0,11$$

وتكون مصفوفة المعاملات الفنية A

$$A = \begin{bmatrix} 0,15 & 0,17 & 0,16 \\ 0,46 & 0,10 & 0,08 \\ 0,23 & 0,30 & 0,11 \end{bmatrix}$$

2- المعاملات الفنية للأجور

$$\mu_1 = \frac{30}{260} = 0,12$$

$$\mu_2 = \frac{90}{300} = 0,30$$

$$\mu_3 = \frac{160}{370} = 0,43$$

المعاملات الفنية للأرباح

$$\vartheta_1 = \frac{10}{260} = 0,038$$

$$\vartheta_2 = \frac{40}{300} = 0,130$$

$$\vartheta_3 = \frac{80}{370} = 0,220$$

3-حساب حجم الإنتاج الضروري لتلبية الطلب النهائي الجديد

$$X = (I - A)^{-1}\ Y$$

$$(I-A)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0,15 & 0,17 & 0,16\\ 0,46 & 0,10 & 0,08\\ 0,23 & 0,30 & 0,11\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0,85 & -0,17 & -0,16\\ -0,46 & 0,90 & -0,08\\ -0,23 & -0,30 & 0,89\end{bmatrix}$$

وتكون قيمة محددة المصفوفة: $|I-A| = 0,532$

نحسب مقلوب المصفوفة $(I\text{-}A)$ وهذا بحساب مصفوفة العينات الصغيرة

$$C(A)=\begin{bmatrix}0,78 & 0,43 & 0,35\\ 0,20 & 0,72 & 0,29\\ 0,15 & 0,14 & 0,69\end{bmatrix}$$

ندور مصفوفة المصغرات هذه فنحصل على المصفوفة المساعدة:

$$C^{'}(A) = AdjA = \begin{bmatrix}0,78 & 0,20 & 0,16\\ 0,43 & 0,72 & 0,14\\ 0,35 & 0,29 & 0,69\end{bmatrix}$$

$$(I-A)^{-1}=\frac{1}{0,532}\begin{bmatrix}0,78 & 0,20 & 0,16\\ 0,43 & 0,72 & 0,14\\ 0,35 & 0,29 & 0,69\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1,47 & 0,38 & 0,30\\ 0,81 & 1,35 & 0,26\\ 0,66 & 0,55 & 1,30\end{bmatrix}$$

$$\bar{X}=\begin{bmatrix}X_1\\ X_2\\ X_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1,47 & 0,38 & 0,30\\ 0,81 & 1,35 & 0,26\\ 0,66 & 0,55 & 1,30\end{bmatrix}\begin{bmatrix}130\\ 140\\ 200\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}304,3\\ 346,3\\ 422,8\end{bmatrix}$$

4-حجم مخرجات القطاع الأول التي تذهب للاستهلاك الوسيط:

$$X_{11} = 0,15\ (304,3) = 45,6$$
$$X_{12} = 0,17\ (346,3) = 58,9$$
$$X_{13} = 0,16\ (422,8) = 67,6$$

التمرين 5-6

1- المصفوفة A غير ترابطية لأن القطاع الأول يمكن أن يقوم بالانتـــاج دون استخدام سلع وسيطة من بقية القطاعات.

-2
$$I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,5 & 0,2 & 0,1 \\ 0 & 0,3 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 & -0,2 & -0,1 \\ 0 & 0,7 & 0 \\ 0 & -0,2 & 0,6 \end{bmatrix}$$

نحسب مصفوفة المصغرات (مصفوفة المعينات الصغيرة) والمصفوفة المساعدة:

$$\begin{bmatrix} 0,42 & 0 & 0 \\ 0,14 & 0,30 & -0,10 \\ -0,07 & 0 & 0,35 \end{bmatrix}$$

$$(I - A) = \begin{bmatrix} 0,42 & 0,14 & 0,07 \\ 0 & 0,30 & 0 \\ 0 & 0,10 & 0,35 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{0,21} \begin{bmatrix} 0,42 & 0,14 & 0,07 \\ 0 & 0,30 & 0 \\ 0 & 0,10 & 0,35 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 150 \\ 250 \\ 200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 531 \\ 355 \\ 425 \end{bmatrix}$$

-3

$$\theta_j = 1 - \sum_{j=1}^{n} a_{jj}$$

$$\theta_1 = 1 - (0,5) = 0,5$$
$$\theta_2 = 1 - (0,2 + 0,3 + 0,2) = 0,3$$
$$\theta_3 = 1 - (0,1 + 0,4) = 0,5$$

وهذا يعني أن القطاع الأول يحتاج إلى (0.5) من المدخلات الأولية لإنتاج وحدة واحدة من منتجاته، في حين يحتاج القطاع الثالث إلى (0.5) ونلاحظ أن القطاع الثاني يستخدم أقل القطاعات (0.3) من المدخلات الأولية لإنتاج وحدة واحدة من منتجاته، وهو القطاع الأكثر استخداما للمدخلات الوسيطة لإنتاج واحدة من منتجاته.

$$X = (I - A)^{-1}.\ Y = B.D$$

حيث نرمز للمصفوفة $(I\text{-}A)^{-1}$ بالرمز B، وهي تمثل مصفوفة النفقات الكلية.

نكتب ذلك بالشكل التالي:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ 0 & \beta_{22} & 0 \\ 0 & \beta_{32} & \beta_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_2 \end{bmatrix}$$

$$X_1 = B_{11}\,Y_1 + B_{12}\,Y_2 + B_{13}\,Y_3$$
$$X_2 = 0 + B_{22}\,Y_2 + 0$$
$$X_3 = 0 + B_{32}\,Y_2 + B_{33}\,Y_3$$

نلاحظ بأن التغير في Y_1 سيؤثر فقط في X_1

التمرين 6-6

- الشعاع الإنتاج Y للقطاعات الثلاثة:

$$Y_i = \sum_{j=1}^{n} X_{ij} + D_i$$

$$Y_i = X_{11} + X_{12} + X_{13} + D_1$$

$$Y_1 = 210 \qquad Y_2 = 120 \qquad Y_3 = 60$$

إذن شعاع الإنتاج هو:

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 210 \\ 120 \\ 60 \end{bmatrix}$$

- مصفوفة المعاملات الفنية: $a_{ij} = \dfrac{X_{ij}}{X_j}$

$$A = \begin{bmatrix} 63/210 & 24/120 & 12/60 \\ 42/210 & 36/120 & 18/60 \\ 21/210 & 12/120 & 18/60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,3 \\ 0,1 & 0,1 & 0,3 \end{bmatrix}$$

-حجم المدخلات الأولية: $V_j = Y_j - \sum_{j=1}^{n} X_{ij}$

$$V_1 = 210 - [63 + 42 + 21] = 84$$

$$V_2 = 120 - [24 + 36 + 12] = 48$$

$$V_3 = 60 - [12 + 18 + 18] = 12$$

المعاملات الفنية لمجمل المدخلات الأولية:

$$\vartheta_1 = \frac{V_1}{Y_1} = \frac{84}{210} = 0,4$$

$$\vartheta_2 = 0,4$$

$$\vartheta_3 = 0,2$$

التمرين 7-6

1- حساب الإنتاج الكلي للقطاعين X_1 X_2 باستخدام الصيغة التالية:

$$X = [I - A]^{-1} Y$$

$$* \ [I - A] = \begin{bmatrix} 0,9 & -0,4 \\ -0,5 & 0,8 \end{bmatrix}$$

$$* \ |I - A| = 0,52$$

$$* \ C'[I - A] = adj[I - A] = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,4 \\ 0,5 & 0,9 \end{bmatrix}$$

$$* \ [I - A]^{-1} = \frac{1}{|I - A|} adj[I - A] = \begin{bmatrix} 1,54 & 0,77 \\ 0,96 & 1,73 \end{bmatrix}$$

$$* \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,54 & 0,77 \\ 0,96 & 1,73 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 307,692 \\ 442,307 \end{bmatrix}$$

2–حساب أسعار السلعتين باستخدام الصيغة التالية:

$$P = w\,r\,[I - A]^{-1}$$

$$P = 2[2 \quad 3]\begin{bmatrix} 1{,}54 & 0{,}77 \\ 0{,}96 & 1{,}73 \end{bmatrix}$$

$$P = [11{,}92 \quad 13{,}64]$$

3– حساب الطلب الوسيط: $X = AX + Y$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}4 \\ 0{,}5 & 0{,}2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 308 \\ 442 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 100 \\ 200 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 30{,}8 + 176{,}8 \\ 154 + 8804 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 100 \\ 200 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 307{,}692 \\ 402{,}307 \end{bmatrix}$$

– جدول الإنتاج المادي

القطاعات	1	2	الطلب النهائي	الإنتاج الكلي
1	30,8	176,8	100	307,692
2	154	88,4	200	442,307

5- حساب مستلزمات العمل:

$$L_1 = r_1 X_1 = 615,2$$
$$L_2 = r_2 X_2 = 1327,2$$

6- حساب القيمة المضافة:

$$V_1 = r_1 L_1 = 1230,4$$

$$V_2 = r_2 L_2 = 3981,6$$

7- تقييم السلعتين بضرب الإنتاج المادي في الأسعار لكلا السلعتين

القطاعات	2 1		الطلب النهائي	الإنتاج الكلي
1	367,3	2379,72	1192	3666,59
2	1835,68	1189,86	2692	5954,70

التمرين 8-6

نحدد أسعار السلعتين بتطبيق الصيغة التالية:

$$P = w\, r\, \alpha \left[I - A\alpha\right]^{-1}$$

وعند التعويض نحصل على:

$$P = 2[1/2 \quad 1]\begin{bmatrix}1+0,2 & 0\\ 0 & 1+0,3\end{bmatrix}\left[\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0,6 & 0,4\\ 0,3 & 0,2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1+0,2 & 0\\ 0 & 1+0,3\end{bmatrix}\right]$$

لحل هذه المعادلة نجزئها إلى أربعة أجزاء:

$$1*\quad w\,r\,\alpha = \begin{bmatrix}1,2 & 2,6\end{bmatrix}$$

$$2*\quad A\alpha = \begin{bmatrix}0,72 & 0,52\\ 0,36 & 0,26\end{bmatrix}$$

$$3*\quad [I - A\alpha] = \begin{bmatrix}0,28 & -0,52\\ -0,36 & 0,74\end{bmatrix}$$

$$4*\quad [I - A\alpha]^{-1} = \frac{1}{|I - A\alpha|}\,adj[I - A\alpha] = \begin{bmatrix}37 & 26\\ 18 & 14\end{bmatrix}$$

$$5*\quad \begin{bmatrix}p_1 & p_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1,2 & 2,6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}37 & 26\\ 18 & 14\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}91,2 & 67,6\end{bmatrix}$$

التمرين 9-6

1- إن زيادة مستوى الأجور بـــ 10% يعني بأخذ الفرق بين المستوى الجديد والمستوى الابتدائي للأجور القيمة 0.1 فإذا عوضنا عن z بهذه القيمة الأخيرة تصبح المعادلات المفروضة (1) بالشكل:

$$\begin{aligned} 0,135x + y + 0,217p &= 0,0165\\ -0,44x + y - 0,53p &= 0 \qquad (2)\\ -0,125x + p &= 0,03 \end{aligned}$$

ولتوضيح تأثير زيادة مستوى الأجور بمقدار 10% على كل من المتحولات الأخرى يكفي حل جملة المعادلات الخيرة -2- وإيجاد قيمة كل من p, y, x الموافقة للقيمة التي أخذها z وهي 10%.

لحل جملة هذه المعادلات نتبع طريقة مقلوب مصفوفة الأمثال وهذا بوضع جملة المعادلات بالشكل:

$$A \times X = B \qquad (3)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0,135 & 1 & 0,217 \\ -0,44 & 1 & -0,53 \\ -0,125 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ p \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0,0165 \\ 0 \\ 0,03 \end{bmatrix}$$

نضرب طرفي العلاقة -3- بـــ A^{-1} فيكون لدينا

$$A^{-1} \times A \times X = A^{-1}B$$

أو

$$X = A^{-1}B \qquad (4)$$

-المصفوفة المساعدة

$$C(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0,506 & 0,125 \\ -1 & 0,162 & -0,125 \\ -0,747 & -0,024 & 0,575 \end{bmatrix}$$

$$C'(A) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -0,747 \\ 0,506 & 0,162 & -0,024 \\ 0,125 & -0,125 & 0,575 \end{bmatrix}$$

وبتقسيم كل عنصر من عناصر هذه المصفوفة على $|A| = 0,6684$ قيمة المحدد للمصفوفة نحصل على مقلوب المصفوفة A أي:

$$A^{-1} = \frac{C'(A)}{|A|} = \frac{1}{0,6684}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -0,747 \\ 0,506 & 0,162 & -0,024 \\ 0,125 & -0,125 & 0,575 \end{bmatrix}$$

نقوم بعملية ضرب A^{-1} بـــ B

$$A^{-1} \times B = \frac{1}{0,6684}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -0,747 \\ 0,506 & 0,162 & -0,024 \\ 0,125 & -0,125 & 0,575 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0,0165 \\ 0 \\ 0,03 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} \times B = \frac{1}{0,6684}\begin{bmatrix} -0,0059 \\ 0,0076 \\ 0,0193 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0088 \\ 0,0114 \\ 0,0289 \end{bmatrix}$$

وبمطابقة الشعاع العمود X مع عناصر $A^{-1} \times B$ بموجب العلاقة (4) التي نكتب بالشكل:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0088 \\ 0,0114 \\ 0,0289 \end{bmatrix}$$

ومنه نجد: $p = 0,0289$ $y = 0,0114$ $x = 0,0088$

2- لبيان مقدار إنخفاض مستوى الأجور اللازم لكي ينعدم عجز ميزان المدفوعات، نعوض في جملة المعادلات (2) المفروضة عن y بـــ0,04- وذلك لأنه كان هنالك في الوضعية الابتدائية عجزا في ميزان المدفوعات قدره $Y_0 = 0,04$ فإذا أخذنا y انحراف العجز عن وضعيته البدائية المقدار 0,04- فيختفي عجز ميزان المدفوعات تماما وتصبح عندها جملة المعادلات (2) بالشكل:

تصبح المعادلات المفروضة -1- بالشكل:

$$\begin{aligned} 0,135x - 0,165z + 0,217p &= 0,04 \\ -0,44x \qquad\qquad - 0,53p &= 0,04 \\ -0,125x - 0,3z + p \qquad &= 0 \end{aligned} \qquad (5)$$

ويمكن أن نشكل من جملة المعادلات (5) المصفوفات التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 0,135 & -0,165 & 0,217 \\ -0,44 & 1 & -0,53 \\ -0,125 & -0,3 & 1 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ z \\ p \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0,04 \\ 0,04 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وبإتباع طريقة مقلوب مصفوفة الأمثال

$$X = A^{-1}B \qquad (7)$$

نحصل على:

$$A^{-1} \times B = \frac{-1}{0,076} \begin{bmatrix} -0,159 & 0,1 & 0,087 \\ 0,506 & 0,162 & -0,024 \\ 0,132 & 0,061 & -0,073 \end{bmatrix} 0,04 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ z \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,031 \\ -0,351 \\ -0,101 \end{bmatrix}$$

وبمطابقة العناصر المتقابلة في المساواة (7) نجد:

$$x = 0,031 \qquad z = -0,341 \qquad p = -0,101$$

نستنتج من ذلك أنه لكي يختفي العجز في ميزان المدفوعات يجب أن تتحقق الشروط الثلاثة الآتية:

1- تزايد في حجم الإنتاج بقدر $31_0\% = \frac{0,031}{1}$ من حجم الإنتاج في الوضعية الابتدائية.

2- انخفاض في مستوى الأجور بقدر $351_0\% = \frac{0,351}{1}$ من مستوى الأجور في الوضعية الابتدائية.

3- انخفاض في مستوى الأسعار بقدر $101_0\% = \frac{0,101}{1}$ من مستوى الأسعار في الوضعية الابتدائية

مصطلحات باللغة الفرنسية

A

abaissement	تخفيض
accroissement	زيادة
accumulation	تراكم
application économique	تطبيق اقتصادي

B

balance des paiements	ميزان المدفوعات
bien	سلعة
budget	ميزانية

C

cofacteur	مرافق الجبري
concurrence	منافسة
consommateur	مستهلك
consommation	استهلاك
consommation intermédiaire	الاستهلاك الوسيط
constant	ثابت
continuité	استمرارية
contrainte	قيد
convexe	محدب

convexité de la courbe d'indifférence	تحدب منحنى السواء
croissant	متزايد
coût total	تكلفة كلية
coût moyen	تكلفة متوسطة
coût marginal	تكلفة حدية
courbe logistique	منحنى منطقي

D

décroissant	متناقص
décroissance	تناقص
déterminant	محدد
dérivée	مشتقة
dérivée partielle	مشتقة جزئية
dérivée croisée	مشتقة متقاطعة
dérivée totale	مشتقة الكلية
différentielle	التفاضل
diagonale principale	القطر الرئيسي

E

économie fermée	اقتصاد مغلق
équation	معادلة
équation du comportement	معادلة سلوكية
équation structurelle	معادلة هيكلية

équation différentielle	معادلة تفاضلية
équation différentielle à variables séparables	معادلة تفاضلية ذات المتحولات المتفرقة
équation différentielle homogène	معادلة تفاضلية متجانسة
équation Bernoullienne	معادلة برنولي
équation aux différences finies	معادلة الفروق المنتهية
équations des outputs	معادلات المخرج
équations des inputs	معادلات المدخل
équilibre	توازن
élasticité	مرونة
élasticité de la demande	مرونة الطلب
élasticité de l'offre	مرونة العرض
élasticité directe	مرونة مباشرة

F

fonction	دالة
fonction logarithme	دالة لوغاريتمية
fonction exponentielle	دالة أسية
fonction composée	دالة مركبة
fonction logistique	دالة لوجستية
fonction objectif	دالة الهدف
fonction de production Gobb-Douglas	دالة الإنتاج لكوب-دوجلاص

دالة الإنتاج ذات المرونة الإحلالية الثابتة *CES*
Fonction de production a une élasticité de substitution constante

formation du capital	تكوين رأس المال

H

Hessien	هيسي

I

input	مدخل
intégrale	تكامل
intégrale indéfini	تكامل غير المحدد
intégrale défini	تكامل محدد
intégration par partie	تكامل بالتجزئة
intervalle	مجال
investissement net	استثمار صافي
impôt	ضريبة
impôt spécifique	ضريبة نوعية
importation	واردات

L

limite	نهاية

M

matières premières	مواد الأولية
matrice	مصفوفة
matrice définie positive	مصفوفة أكيدة الإيجابية

matrice définie négative		مصفوفة أكيدة السالبية
matrice inverse		معكوس مصفوفة
maximum		عظمى
méthode itérative		الطريقة التدريجية
mineur de l'élément a_{ij}	a_{ij}	محدد الصغير للعنصر
minimum		صغرى
modèle		نموذج
modèle de Domar		نموذج دومار
modèle de Cobweb		نموذج نسيج العنكبوتي
multiplicateur		مضاعف
multiplicateur de Lagrange		مضاعف لاقرانج

O

opérateur de différence	معامل الفرق
opportunité	الفرصة
optimisation sous contrainte	الأمثلية خاضعة للقيد

P

paramètres	معلمات
pente	إنحدار
prix	سعر
produit total	الناتج الكلي
produit marginal(*PPmg)*	الناتج الحدي
produit moyen*(PPm)*	الناتج المتوسط
profit	ربح
potentiel de productivité	طاقة الإنتاجية

R

relation	العلاقة
rendements d'échelle	غلة الحجم
revenu total *(RT)*	الإيراد الكلي
revenu marginal*(Rmg)*	الإيراد الحدي
revenu moyen(*Rm*)	الإيراد المتوسط
revenu national	الدخل الوطني

S

surplus du consommateur	فائض المستهلك
surplus du producteur	فائض المنتج – البائع –
substituabilité	قابلية للإحلال

T

taux marginal de substitution	معدل الحدي للإحلال
taux marginal de substitution technique	معدل الحدي الإحلال التقني
taux de croissance instantané	معدل نمو آني
théorie de Euler	نظرية أولر
théorie du produit marginal de distribution	نظرية الإنتاج الحدية للتوزيع
trajectoire	المسار الزمني
trajectoire convergente	المسار الزمني المتقارب
trajectoire divergente	المسار الزمني المتباعد

U

utilité	منفعة
utilité totale	منفعة كلية
utilité marginale	منفعة حدية

V

valeur stationnaire	قيمة إستقرارية
valeur d'équilibre	قيمة توازنية
valeur ajoutée	قيمة مضافة
variable	متغير
variable exogène	متغير خارجي
variable endogène	متغير داخلي



المراجع

1- باللغة الفرنسية

Azoulay Elie & Jean Avignant: Mathématiques 1.Analyse ,cours et Exercices ,copyrigt 1983

Bendib Rachid: Mathématique pour Economistes, O.P.U.2003.

Danko.P 1 A Popov: Exercices et problémes des Mathématiques supérieures , édition Mir , Moscou 1977.

Hayek Naila –Leca Jean-pierre: Mathématique pour l'économieAnalyse –Algèbre 3ieme édition Dunod, Paris 2007

Lahadene Jean-Jacques, Fourcade Gérard: Des Mathématiques A l'Economie, exercices et problèmes corrigés – copyrght 1985.

Lecourtre J.P –P.Pilibossian: Analyse II, Mathématiques pour les sciences économiques avec rappels de cours, exercices corrigés 6ieme édition, Dunod Paris 1998

2- باللغة العربية

- **د.شرابي عبد العزيز**: الرياضيات الاقتصادية- المصفوفات - ديوان المطبوعات الجامعية 1992، الجزائر
- **د. شريف عصام عزيز**: تحليل المدخلات - المخرجات، ديوان المطبوعات الجامعية 1983، الطبعة الأولى الجزائر

- **د.علوش جعفر باقر** – الإقتصاد الرياضي – المكتبة الجامعية – غريان – ليبيا 2004
- **د.فاضل عبد الرزاق – د.مندر عواد – د ياسر الجندي**: الرياضيات المالية والعامة، جامعة دمشق 2003-2004
- **هندرسون جيمس.م. – ريتشارد أكواندت**: نظرية اقتصاديات الوحدة أسلوب رياضي – ترجمة د. متوكل عباس مهلهل، د محمد مسلم الردادي – دار ما كجروهيل للنشر 1980
- **د.هيكل عبد العزيز فهمي – د يحي سعد زغلول**: آساسيات الرياضة البحتة للاقتصاديين – الدار الجامعية 1976

أنجز طبعه على مطابع
ديوان المطبوعات الجامعية
الساحة المركزية ـ بن عكنون
الـجـزائـر